

**М. В. Радченко**

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

м. Київ

morskaya0510@gmail.com

## ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З БІОЛОГІЇ

Одне з важливих місць у вивченні курсу «Алгебра і початки аналізу» займає тема «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування». Найбільш повне її вивчення передбачене за програмами з математики профільного та поглибленого рівнів навчання. За нині чинною програмою з математики учні вивчають границю функції в точці, основні теореми про границі функції, похідну функції, її геометричний і фізичний зміст, правила диференціювання, ознаку сталості функції, достатні умови зростання й спадання функції, екстремуми функції тощо [2].

Похідна постає як фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Похідна характеризує швидкість зміни функції по відношенню до зміни незалежної змінної. В геометрії похідна характеризує кривизну графіка, в механіці - швидкість нерівномірного руху, в біології - швидкість розмноження колонії мікроорганізмів, в економіці - вихід продукту на одиницю витрат, в хімії - швидкість хімічної реакції.

Розглянемо використання похідної в біології на прикладі розв'язання окремих задач:

**Задача 1.** Нехай популяція бактерій в момент часу  $t$  (час в секундах) нараховує  $x(t)$  особин:  $X(t)=3000+100t^2$ . Ця формула виражає залежність кількості особин від часу. Знайти швидкість росту популяції:

- а) в момент часу 1 с;
- б) в момент часу 60 с.

Розв'язання задачі

<b>1. Створення математичної моделі до задачі</b>
<p>Розв'язання даної задачі передбачає розуміння поняття <b>популяція</b>, тому перед створенням математичної моделі до задачі, варто учням наголосити на цьому:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Популяція</b> — це сукупність організмів одного виду, що займають обмежений ареал (територія поширення якогось об'єкта або явища), мають спільне походження за фенотипом та географічно ізольовані від інших популяцій даного виду, можуть вільно схрещуватися і дають плодюче потомство.</li> </ul> <p>В умові задачі задано функцію швидкості росту популяції, яка має наступний вигляд:  <math>X(t) = 3000 + 100t^2</math>, де <math>x</math> – кількість особин, що виражається додатним числом.</p> <p>Перекладаючи вимогу запропонованої задачі на мову математики, отримуємо математичну задачу: <b>визначити похідну функції <math>X(t) = 3000 + 100t^2</math> в точці <math>t=1</math> та <math>t=60</math>.</b></p>
<b>2. Хід розв'язання математичної задачі</b>
<p>Знаходимо похідну <math>X'(t)</math> від заданої функції:  <math display="block">X'(t) = (3000 + 100t^2)' = 200t.</math>                     Отже, маємо <math>X'(t) = 200t</math> – швидкість росту популяції.                      Знаходимо значення похідної <math>X'(t)</math> при <math>t=1</math> та <math>t=60</math>:                      а) <math>X'(1) = 200 \cdot 1 = 200</math> (ос/с) – швидкість росту популяції через 1 с;</p>

б)  $X'(60) = 200 \cdot 60 = 12000$  (ос/с) – швидкість росту популяції через 60 с.  
Розв'язання математичної задачі завершено.

### 3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології

Отже, швидкість росту популяції в момент часу  $t=1$  с становить 200 ос/с; а в момент часу  $t=60$  с – 12000 ос/с.

**Відповідь:** а) 200 ос/с; б) 12000 ос/с.

**Задача 2.** Реакція організму на введені ліки може виражатися в підвищенні кров'яного тиску, зменшенні температури тіла, зміні пульсу або інших фізіологічних показників. Ступінь реакції залежить від призначених ліків та їх дози. Припустимо, що  $X$  позначає дозу призначених ліків, тоді  $Y$  – функція ступеня реакції, що виражається формулою  $y = x^2(a - x)$ , де  $a$  – біомаса. При якому значенні  $X$  реакція максимальна?

Розв'язання

### 1. Створення математичної моделі до задачі

За умовою задачі маємо функцію ступеня реакції, яка задана залежністю  $y = x^2(a - x)$ , де  $a$  – біомаса.

Для того, щоб розв'язати дану задачу на мові математики, знайдемо похідну функції  $y'(x)$  та визначимо максимальну межу до настання побічних реакцій організму на введенні ліки.

Маємо математичну задачу: **знайти найбільше значення функції  $y = x^2(a - x)$ .**

### 2. Хід розв'язання математичної задачі

Знайдемо похідну заданої функції:

$$y'(x) = (x^2(a - x))' = 2ax - 3x^2.$$

Зауважимо, що доза призначених ліків знаходиться в наступних межах:  $0 < x < a$ , так як біомаса  $a$  виражається натуральним числом.

Знайдемо стаціонарні точки. Для цього прирівняємо отриману похідну до нуля, тобто  $y'(x) = 0$ . Отримаємо:

$$2ax - 3x^2 = 0. \text{ Це можна подати в іншому вигляді: } x = \frac{2a}{3}.$$

Тоді  $y'(x) = 0$  при  $x = \frac{2a}{3}$ . В цій точці  $y''\left(\frac{2a}{3}\right) = -2a < 0$ .

Тоді  $x = \frac{2a}{3}$  – точка максимуму.

Оскільки друга похідна від'ємна, то в точці  $x = \frac{2a}{3}$  функція досягає найбільшого значення.

Розв'язання математичної задачі завершено.

### 3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології

Виходячи з біологічного змісту задачі, одержаний результат свідчить про те, що максимальна реакція на прийняття ліків досягається при  $x = \frac{2a}{3}$ .

**Відповідь:** Максимальна реакція на прийняття ліків досягається при  $x = \frac{2a}{3}$ .

Отже, застосування похідної під час розв'язування задач не вичерпується лише фізико-математичними дисциплінами, так як воно має тісний зв'язок з біологією, медициною, хімією, екологією, економікою, тощо. Так, в біології похідна виступає як швидкість зміни чисельності популяції, або як чисельність в певний момент часу. Завдяки математичному апарату ми можемо легко пояснювати ті чи інші біологічні залежності та, разом з тим, формувати в учнів як математичні, так і біологічні компетентності.

### Література

1. Жуматий П. Г. Математическая обработка медико-биологических данных. Задачи и примеры / П. Г. Жуматий. – Одесса, 2009. – 56 с.
2. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (Профільний рівень) від 2018 р. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
3. Чорний В.З. Прикладні аспекти диференціального числення: Навчальний посібник / В.З. Чорний, Л. Г. Хохлова, С. Г. Хома-Могильська. – Тернопіль: “Тайп”, 2016. – 72 с.

**Анотація.** Радченко М. В. Застосування похідної функції під час розв’язування прикладних задач з біології. Зазвичай у школі формування поняття похідної розпочинають з розгляду двох відомих задач: визначення миттєвої швидкості та знаходження тангенса кута нахилу дотичної, проведеної до графіка функції, з додатним напрямом осі  $OX$ . Проте, на цьому зміст та застосування похідної не висчерпується. У статті висвітлено застосування похідної під час розв’язування задач з біології. Наведено хід розв’язання кожної задач за допомогою створення математичної моделі до задачі, розв’язання суто математичної задачі та інтерпретації розв’язків останньої мовою біології.

**Ключові слова:** похідна, похідна та її застосування, біологічний зміст похідної, міжпредметні зв’язки, математична модель.

**Summary.** Radchenko M.V. Application of derivative function in solving applied biology problems. Usually in a school of formation of the concept of a derivative begin with consideration of two known tasks: determination of the instantaneous velocity and finding of the tangent of the angle of tangent, drawn to the graph of the function, with a positive direction of the axis of the axis. However, the content and use of the derivative is not exhausted. The article deals with the use of the derivative in solving problems in biology. The process of solving each problem by creating a mathematical model for the problem, solving a purely mathematical problem, and interpreting the solutions in the last language of biology is given.

**Key words:** derivative, derivative and its application, biological content of derivative, cross-curricular relations, mathematical model.

**Аннотация.** Радченко М. В. Применение производной функции при решении прикладных задач по биологии. Обычно в школе формирование понятия производной начинают с рассмотрения двух известных задач: определение мгновенной скорости и нахождения тангенса угла наклона касательной, проведенной к графику функции, с положительным направлением оси  $OX$ . Однако, на этом содержание и применение производной не исчерпывается. В статье освещены применения производной при решении задач по биологии. Приведен ход решения каждой задачи с помощью создания математической модели к задаче, решение чисто математической задачи и интерпретации решений последней на языке биологии.

**Ключевые слова:** производная, производная и ее применение, биологический смысл производной, межпредметные связи, математическая модель.