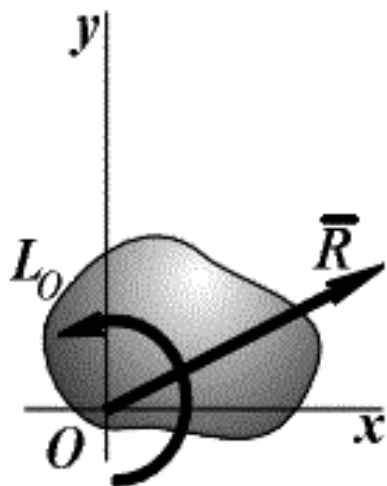


ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА



Полтава - 2021

УДК 621.01(075)-057.875
ББК 34.41р30
К 60
ISBN 978-617-7915-41-5

Навчальний посібник рекомендовані до друку Вченою радою Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка протокол №9 від 22. 02. 2021 р.

Калязін Ю. В. Технічна механіка: Навчально-методичний посібник до самостійної роботи / Калязін Ю. В., – Полтава: ПП «Астроя», 2021. – 204 с.

Рецензенти:

Рябчиков М. Л., професор кафедри технологій і дизайну Української інженерно-педагогічної академії, доктор технічних наук.

Хлопов А. М., завідувач кафедри виробничо-інформаційних технологій та безпеки життєдіяльності Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка, кандидат фізико-математичних наук.

У навчальному посібнику представлений теоретичний матеріал та завдання для самостійного опрацювання дисципліни «Технічна механіка». Розглядаються питання основ теоретичної та прикладної механіки в обсязі передбаченому освітньо-професійними програмами підготовки бакалаврів спеціальностей «Професійна освіта». Посібник може бути корисним викладачам ліцеїв та коледжів для підготовки до занять з технічних дисциплін, а також здобувачам вищої освіти інших спеціальностей, які вивчають технічну та прикладну механіку.

ISBN 978-617-7915-41-5

© Калязін Ю.В., 2021
© ПНПУ імені В. Г. Короленка 2021



ВСТУП

Відповідно до освітньо-професійних програм підготовки фахівців професійної освіти в галузях деревообробки, легкої промисловості та дизайну за освітньо-кваліфікаційним рівнем «Бакалавр» навчальна дисципліна «Технічна механіка» є обов'язковою складовою професійної підготовки. Дисципліна базується на знаннях з «Фізики», «Вищої математики», «Креслення», має безпосередній зв'язок з матеріалознавством. Технічна механіка є теоретичною основою для подальшого вивчення технологічного обладнання, конструювання виробів.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є основні закони теоретичної механіки та їх використання у прикладній механіці.

Метою викладання навчальної дисципліни «Технічна механіка» є формування у студентів уявлення про теоретичні основи силового, кінетичного та динамічного аналізу складових частин і деталей машин, засвоєння понятійного апарату, який необхідний для формування системи технічних знань.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Технічна механіка» є формування навичок застосовування одержаних знань для вивчення будови та конструкцій технологічних машин і механізмів, а також для розвитку логічного мислення, вміння здійснювати узагальнені висновки.

Очікуваними результатами навчання з дисципліни є здатність студентів:

- виявляти знання основних законів статички, кінематики та динаміки;
- оцінювати витрати роботи, потужність та ККД в механічних системах;
- відтворювати структурні схеми типових механічних передач і будову типових деталей машин;
- мати уяву про розрахунки на міцність типових деталей машин;
- застосовувати знання для аналізу будови машин.

Навчальна дисципліна складається з таких змістових модулів:

1. Основи теоретичної механіки.
2. Прикладна механіка.

Вивчення дисципліни передбачає проведення аудиторних занять (лекції та лабораторні роботи), а також самостійну роботу студентів, зокрема виконання індивідуально-дослідних завдань.

Навчальний посібник призначений для самостійного опрацювання дисципліни. Зміст навчального матеріалу викладений у посібнику спрямований на використання основних понять технічної механіки для розв'язання практичних задач прикладної механіки. Для більш поглибленого вивчення та знаходження окремих довідкових матеріалів рекомендуємо звернутися до списку літератури.

МОДУЛЬ 1. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Теоретична механіка — наука про механічний рух матеріальних твердих тіл і їх взаємодію. Механічний рух розуміється як переміщення тіла у просторі і часі по відношенню до інших тіл, зокрема до Землі.

Для зручності вивчення теоретичну механіку поділяють на статику, кінематику і динаміку.

Статика вивчає умови рівноваги тіл під дією сил.

Кінематика розглядає закони руху тіл як переміщення у просторі.

Динаміка вивчає рух тіл під дією сил.

1.1.СТАТИКА.

Статикою називається розділ теоретичної механіки, який вивчає властивості сил та умови рівноваги твердих тіл.

Основним завданням статyki є встановлення законів рівноваги твердих матеріальних об'єктів.

1.1.1.Основні поняття та визначення

У теоретичній механіці користуються абстрактними уявленнями про матеріальну точку і абсолютно тверде тіло.

Матеріальне тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати, називається матеріальною точкою.

Абсолютно твердим називають таке тіло, в якому відстань між двома його точками при всіх умовах залишається незмінною (інакше кажучи, тіло не деформується).

Силою в механіці називають векторну величину, яка є мірою механічної взаємодії матеріальних тіл. Одиницею вимірювання сили в системі СІ є 1Ньютон, який визначається як сила, що надає тілу масою в 1 кг прискорення 1м/с^2 .

Механічна сила визначається лінією дії, напрямом та числовим значенням сили. Пряма, вздовж якої направлений вектор сили, називається лінією дії сили.

Сукупність сил, що прикладена до даного тіла, називається системою сил.

Система сил, під дією якої тіло знаходиться у рівновазі є еквівалентною нулю, або зрівноваженою.

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то така сила називається рівнодіючою даної системи сил.

Статика базується на шістьох аксіомах.

Аксіома 1. (перший закон Ньютона). *Ізольована від зовнішньої дії матеріальна точка знаходиться у стані спокою або рухається прямолінійно і рівномірно.*

Аксіома 2. *Дві сили, що прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно зрівноважені тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем та діють уздовж однієї прямої у протилежні боки.*

Аксіома 3. *Прикладення або відкидання системи взаємно зрівноважених сил не змінює дію даної системи на абсолютно тверде тіло.*



Наслідок з аксіом 2 та 3. Не змінюючи дію даної системи сил на абсолютно тверде тіло можна точку прикладання кожної сили переносити вздовж лінії її дії в будь-яку точку тіла.

Аксіома 4. (аксіома про паралелограм сил). Рівнодіюча двох сил, які прикладені до даної точки абсолютно твердого тіла і направлені під кутом одна до одної, прикладена до тієї ж точки і зображується діагоналлю паралелограма, що побудований на даних силах, як на сторонах.

Аксіома 5. (дії та протидії). Сили, з якими діють одне на одне два тіла, завжди рівні за модулем і направлені вздовж однієї прямої у протилежні боки.

Аксіома 6. Рівновага змінного (такого, що деформується) тіла, яке знаходиться під дією даної системи сил, не порушиться, якщо вважати, що тіло затверділо (стало абсолютно твердим).

У більшості задач на рівновагу розглядають невідільні тверді тіла, тобто тіла, що знаходяться під дією інших тіл, з якими вони взаємодіють і які заважають їх переміщенню.

Усе те, що обмежує переміщення даного тіла, називається в'яззю. В'язь діє на тіло, що розглядається, з деякою силою, яку називають реакцією в'язі. Для визначення кожної реакції, як і будь якої сили, необхідно знати її величину, напрям та лінію дії.

Аксіома в'язей. Будь яке невідільне тіло можна звільнити від в'язей, замінивши їх дію реакціями, після чого розглядати тіло як вільне, що знаходиться у рівновазі під дією заданих сил і реакцій.

Незважаючи на велику кількість фізично існуючих в'язей, більшість з них може бути зведена до наступних типів.

Ідеально гладка поверхня. Це поверхня, для якої при визначеній силі реакції, можна знехтувати силою тертя між тілом та поверхнею.

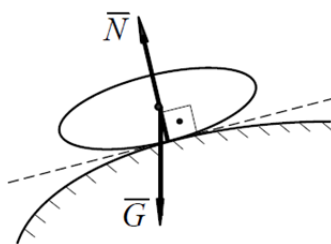


Рис. 1.1. Сила реакції на ідеально гладкі поверхні.

Якщо тіло спирається на ідеально гладку поверхню (рис.1.1), то реакція такої поверхні або площини направлена перпендикулярно до їх спільної дотичної і виникає у точці дотику.

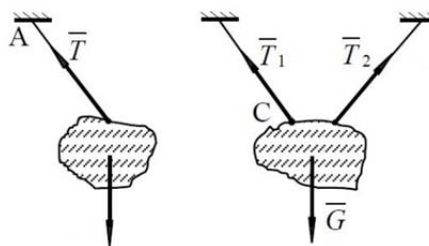


Рис. 1.2. Сили реакції у в'язі «ідеальна нитка».

Ідеальна нитка. В'язь (рис. 1.2), що виконана у вигляді гнучкої нерозтяжної нитки (мотузки, канату, тросу, ланцюга), не дає тілу віддалятися від точки підвісу нитки за напрямом AM . Таким чином, реакція T (T_1 , T_2) натягнутої нитки буде напрямлена вздовж нитки до точки її підвісу.

У практиці часто зустрічаються схеми з використанням балок та визначенням реакції їх опор: шарнірно-нерухомих і рухомих циліндричних опор.

Циліндричною шарнірно-нерухомою опорою (циліндричним шарніром) називається таке з'єднання двох тіл, яке допускає обертання обох тіл навколо їх загальної вісі A (рис. 1.3), або лише одного з них відносно другого. На рис.1.3,а схематично показана конструкція циліндричного шарніру, а на рис. 1.3,б його умовне зображення на схемі.

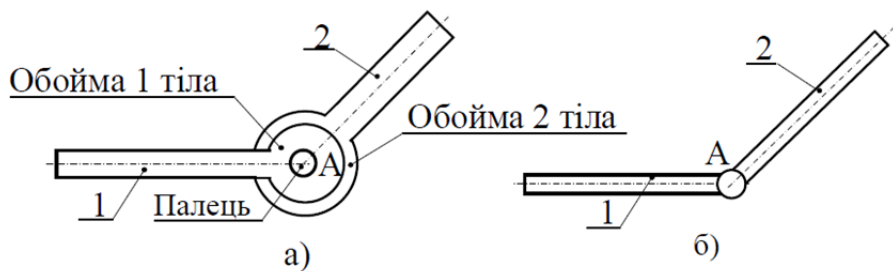


Рис. 1.3. Циліндричні опори.

Шарнірно-нерухома опора перешкоджає будь-якому поступальному руху тіла, але надає йому можливість вільно обертатися навколо вісі шарніра A . Центр шарніру є точкою прикладення опорної реакції R_A , величина і напрям якої невідомі.

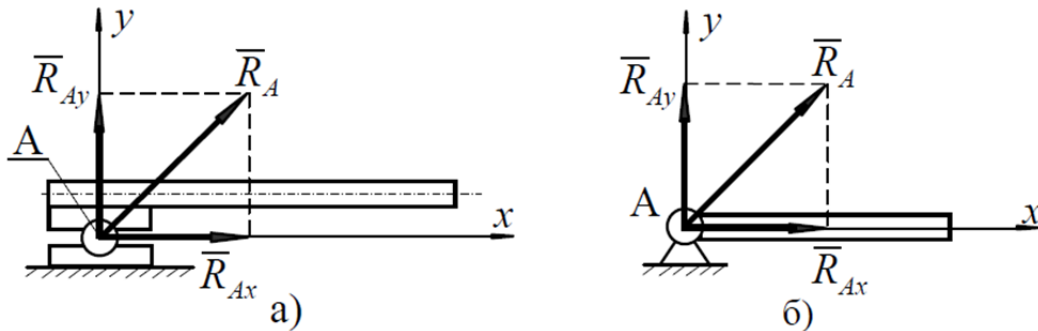


Рис. 1.4. Реакції циліндричних опор.

Реакцію R_A можна розкласти на дві складові R_{Ax} і R_{Ay} за осями обраної системи координат (рис. 1.4). Одну з осей координат доцільно спрямовувати уздовж вісі балки.

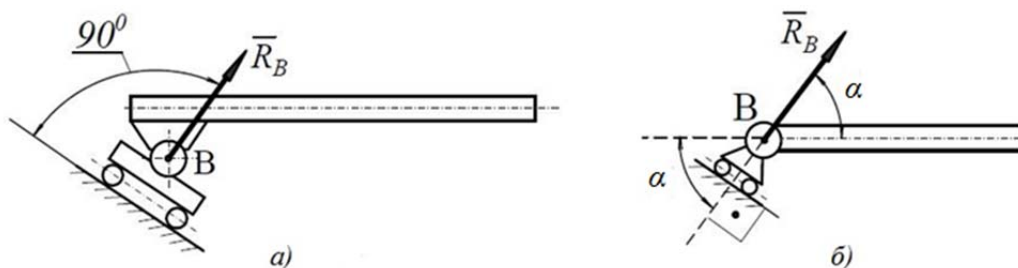


Рис. 1.5. Реакція шарнірно - рухомої опори



Шарнірно - рухома опора відрізняється від шарнірно-нерухомої тим, що та її частина, яка спирається на опорну поверхню, не закріплена жорстко, а поставлена на котки. Таке закріплення не перешкоджає переміщенню системи за лінією кочення котків (рис. 1.5).

На рис. 1.5,*а* схематично показана конструкція шарнірно-рухомої опори, а на рис. 1.5,*б* її умовне зображення на розрахунковій схемі. Якщо не враховувати тертя котків, то реакція рухомої опори R_B буде направлена перпендикулярно до площини кочення котків і проходить через вісь B шарніра.

Жорстке защемлення. Нехай балка AB своїм кінцем жорстко замурована у стінку (рис. 1.6). Таке закріплення не допускає ні поступального руху балки, ні обертального. Якщо на балку діють зовнішні сили, то в точці защемлення виникає як реакція R_A , так і додаткова пара сил з моментом защемлення M_3 .

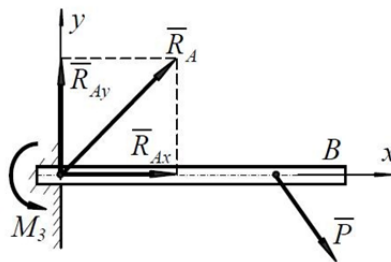


Рис. 1.6. Реакції жорсткого защемлення балки.

Модуль та напрям реакцій R_A і моменту M_3 невідомі. Рекомендується розкласти реакцію R_A на дві складові R_{Ax} і R_{Ay} , по вісям обраної системи координат. Момент защемлення M_3 рекомендується приймати додатнім, тобто направленим проти ходу годинникової стрілки.

Сферичний шарнір (рис. 1.7) допускає обертання стержня OA в просторі навколо точки O (центра шарніру).

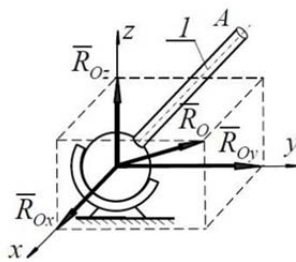


Рис. 1.7. Реакції сферичного шарніра.

Реакція опори R_O на сферичну частину стержня I невідома за модулем і напрямом, але її лінія дії проходить через центр шарніру O . Рекомендується розкласти реакцію сферичного шарніра R на складові R_{Ox} , R_{Oy} , R_{Oz} (рис. 1.7) по вісям обраної системи координат.

Реакція невагомийого ідеального стержня. На рис. 1.8 показане закріплення тіла G за допомогою кронштейну, що складається із стержнів, вагою яких можна знехтувати. У кожного з стержнів на кінцях закріплені шарніри (A , B , C), якими стержні з'єднуються між собою або приєднуються до інших елементів конструкції.

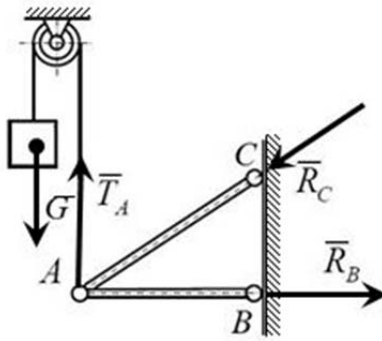


Рис. 1.8.

Оскільки вагою стержнів і силами тертя в шарнірах нехтують, то на кожен із стержнів будуть діяти дві зрівноважені сили, які прикладені до шарнірів і напрямлені вздовж прямої, що проходить через центри шарнірів. Ці сили можуть як розтягувати (R_B) так і стискати (R_C) стержень.

Навантаження бувають зосереджені і розподілені. Зосереджені сили прикладаються до тіла на площадці, розміри якої дуже малі у порівнянні з розмірами тіла, і тому в розрахунках приймають, що такі сили прикладені до деякої точки тіла. Зосереджені сили, як правило, позначають літерами P і F . Одиницею вимірювання зосереджених сил є Ньютон (H).

Розподілене навантаження прикладається до тіла вздовж лінії. Величина розподіленого навантаження, що діє на одиницю довжини тіла, називається інтенсивністю навантаження і позначається літерою q . Одиницею вимірювання інтенсивності розподіленого навантаження є $H/м$. Фігура, яка зображує розподілене навантаження, називається епюрою розподіленого навантаження.

Рівномірно розподілене навантаження (рис.1.9,а) при розв'язуванні задачі можна замінити рівнодійною силою Q . За модулем вона дорівнює площі епюри $Q = l \times q$ і прикладена до точки, що лежить на середині відрізка AB .

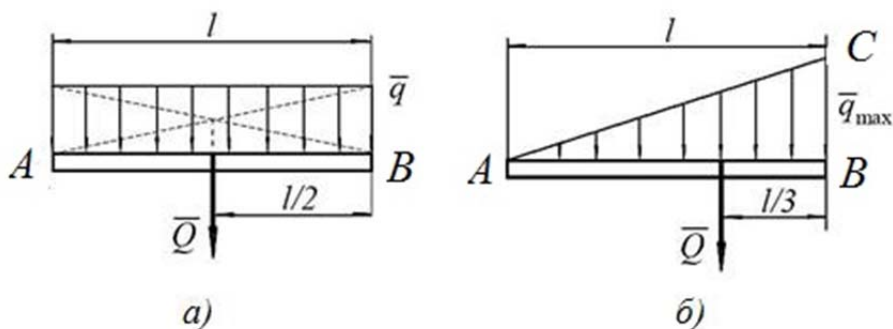


Рис. 1.9. Розподілене навантаження.

Для навантаження, розподіленого за «законом трикутника» (рис. 1.9,б), інтенсивність є змінною величиною, причому зміна відбувається від нуля до максимального значення q_{max} .

Рівнодійна такого навантаження за модулем дорівнює площі епюри (трикутника) $Q = 0,5lq_{max}$ і прикладена до точки, яка лежить на відстані $l/3$ від сторони BC епюри ABC (відповідає центру тяжіння фігури епюри).



Питання для самоконтролю

1. Що називається в'яззю?
2. У чому полягає принцип звільнення тіла від в'язей?
3. Перерахувати основні типи в'язей, для яких лінія дії реакції відома.
4. Перерахувати основні типи в'язей, для яких лінія дії реакції невизначена.
5. Як направлена реакція ідеального стержня?
6. Сформулюйте аксіому рівноваги двох сил.
7. Сформулюйте аксіому паралелограма сил.
8. Сформулюйте аксіому рівності дії і протидії.
9. Яка сила називається рівнодійною.

1.1.2. Умови рівноваги систем збіжних сил

Збіжними називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. 1.10,а).

Якщо перенести всі сили вздовж лінії їх дії в цю точку, отримуємо еквівалентну систему сил, що прикладена до однієї точки. Рівнодійна \bar{R} даної системи сил, які проходять через точку O , прикладена до цієї ж точки і зображується замикаючою стороною силового багатокутника, який побудовано (рис. 1.10,б).

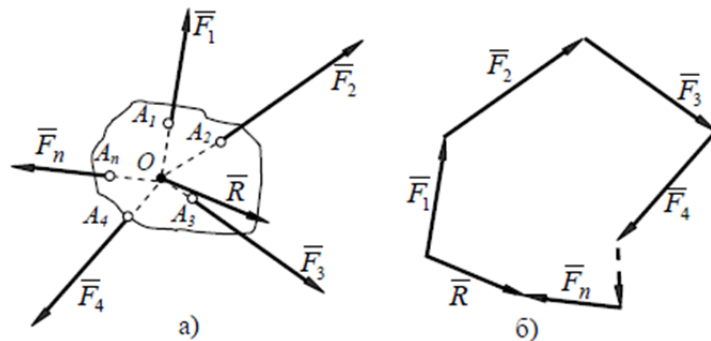


Рис. 1.10. Система збіжних сил.

Так як система збіжних сил може бути замінена однією силою – рівнодійною, то необхідною і достатньою умовою рівноваги тіла під дією системи збіжних сил є рівність нулю цієї рівнодійної:

$$\bar{R} = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^m \bar{F}_k = 0. \quad (1.1)$$

Оскільки модуль рівнодійної визначається за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (1.2)$$

то тіло під дією системи збіжних сил буде знаходитись у рівновазі, коли $R_x = 0$ і $R_y = 0$. В результаті отримаємо наступні аналітичні умови рівноваги тіла під дією системи збіжних сил:

$$\sum_{k=1}^m F_{kx} = 0 \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^m F_{ky} = 0. \quad (1.3)$$

Таким чином, для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх цих сил на кожну з координатних вісей дорівнювали нулю.

У більшості задач на рівновагу розглядають невідільні тверді тіла, тобто тіла, що знаходяться під дією інших тіл, з якими вони взаємодіють і які заважають їх переміщенню.

При розв'язуванні задач аналітичним способом потрібно виконати дії.

1. Виділити об'єкт, який буде розглядатися у рівновазі.
2. Встановити і показати на схемі активні сили, що діють на тіло.
3. З'ясувати характер в'язей і встановити напрями їх реакцій.
4. Обрати декартову систему координат Oxy .
5. Скласти рівняння рівноваги твердого тіла у проекціях на ці вісі координат.
6. Розв'язати систему складених рівнянь та визначити невідомі величини.

При розв'язуванні задач на рівновагу твердого тіла геометричним методом рекомендується дотримуватися наступного порядку:

1. Виділити об'єкт, який буде розглядатися у рівновазі.
2. Встановити і показати на схемі активні сили, що діють на тіло.
3. З'ясувати характер в'язей і встановити напрями їх реакцій.
4. Побудувати замкнений силовий багатокутник (побудову треба починати з сил, відомих за модулем і напрямом).
5. З силового багатокутника визначити невідомі сили.

Приклад розв'язування задачі

Ідеальний стержень AB утримується в рівновазі нерозтяжною ниткою BC . До шарніру B стержня на нитці підвішене тіло вагою G (рис. 1.11).

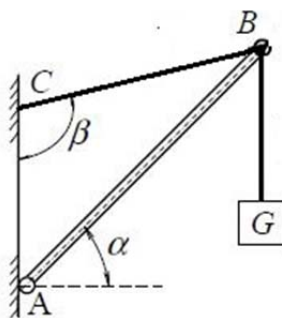


Рис. 1.11.

Визначити натяг нитки BC і реакцію стержня AB , якщо $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 105^\circ$; $G=500 \text{ Н}$.

Розв'язок. Розглянемо рівновагу вузла B (рис. 1.12). До вузла B прикладена сила G , яка перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки B , натяг нитки T і реакція стержня R_A , яка також перенесена вздовж лінії дії від т. A . Таким чином, вузол B знаходиться в рівновазі під дією трьох сил G , T та R_A , які лежать в одній площині і мають одну й ту ж точку перетину.

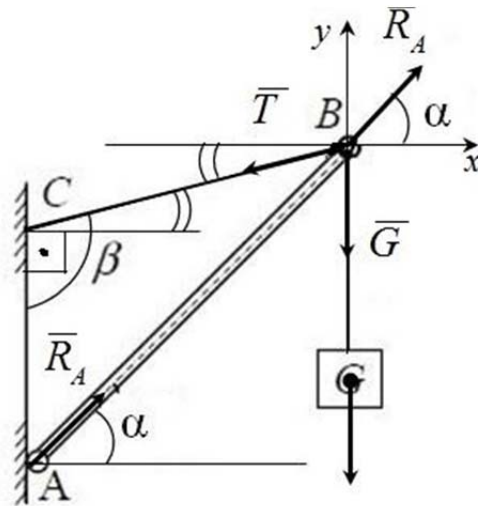


Рис. 1.12.

Сформулюємо умову рівноваги системи сил, що діють на точку B :

$$\sum \bar{F}_k = \bar{T} + \bar{G} + \bar{R}_A = 0.$$

Спроекуємо рівняння на вісі x та y

$$\sum F_{kx} = -T \cdot \cos(\beta - 90^\circ) + R_A \cdot \cos \alpha = 0;$$

З першого рівняння визначимо R_A через T

$$R_A = T \frac{\cos 15^\circ}{\cos 45^\circ}.$$

Після підстановки цього виразу в друге рівняння отримуємо рівняння з одним невідомим T

$$-T \cdot \sin 15^\circ - G + T \frac{\cos 15^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \sin 45^\circ = 0,$$

з якого після перетворень визначимо T

$$T = \frac{G}{\cos 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{500}{0,966 \cdot 1 - 0,259} = 707 \text{ Н}.$$

Реакція стержня

$$R_A = T \frac{\cos 15^\circ}{\cos 45^\circ} = 707 \frac{0,966}{0,707} = 966 \text{ Н}.$$

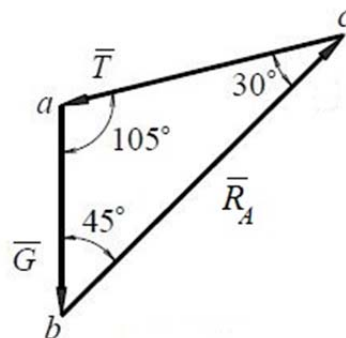


Рис. 1.13.

Задача може бути розв'язана іншим способом – графоаналітичним. Згідно з записаним векторним рівнянням побудуємо силовий трикутник. Для цього з довільної точки a (рис. 1.13) відкладемо в деякому масштабі вектор G . З точки “ a ” початку вектору G проведемо пряму, паралельну до лінії дії реакції T , а з точки “ b ” кінця вектору G - пряму, паралельну до лінії дії реакції R_A . Проведені прямі перетинаються в точці « c », утворивши трикутник abc . Визначимо напрям сил, керуючись тим, що при додаванні векторів початок кожного наступного вектора повинен виходити з кінця попереднього.

Знайти невідомі величини можна помірявши відповідні сторони силового трикутника або, більш точно, за відомими кутами трикутника з теореми синусів:

$$\frac{G}{\sin 30^\circ} = \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{R_A}{\sin 105^\circ}.$$

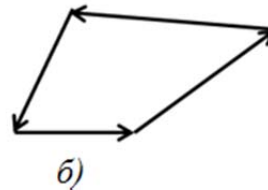
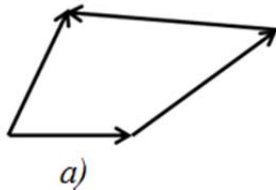
Звідки:

$$T = \frac{G \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{500 \cdot 0,707}{0,5} = 707 \text{ Н}.$$

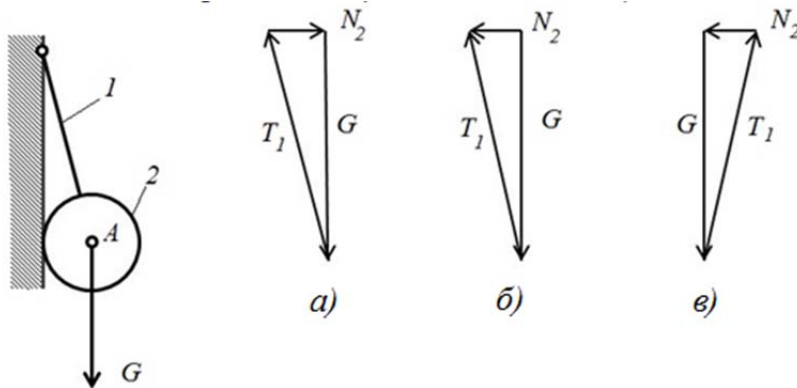
$$R_A = \frac{G \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{500 \cdot 0,966}{0,5} = 966 \text{ Н}.$$

Питання для самоконтролю

1. Яка система сил називається збіжною?
2. Яким чином спрямовують реакції в'язей?
3. Вкажіть умови рівноваги системи збіжних сил.
4. Як визначаються проекції сил на вісі координат?
5. Поясніть суть геометричного методу визначення рівнодійної сили.
6. За багатокутником сил визначить скільки сил входить до кожної системи. Який рисунок відповідає зрівноваженій системі сил?



7. З трикутників сил оберіть той, що відповідає точці A .





1.1.3. Умови рівноваги плоских систем сил

Для довільної плоскої системи сил рівнодійна усіх сил, що прикладені до тіла, $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ у повній мірі не характеризує стан тіла. Виникає силова дія, яка намагається повертати тіло – *момент сил*.

Алгебраїчним моментом сили відносно точки називається добуток величини сили на довжину перпендикуляра, що опущений з точки, відносно якої визначається момент, на лінію дії сили (рис. 1.14).

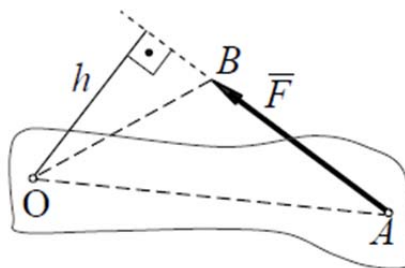


Рис. 1.14.

Визначається момент сили відносно точки наступним чином:

$$m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (1.4)$$

Точка O , відносно якої визначається момент, називається центром моменту. Перпендикуляр h , який опущений з точки O на лінію дії сили, називається плечем сили відносно точки O .

Момент вважається додатнім, коли сила намагається повернути площину креслення навколо центра моменту проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним, коли у протилежному напрямку.

Розмірність моменту сили в системі одиниць SI – $H \cdot m = Дж (Джоуль)$, у технічній системі одиниць – $кГм$ ($1кГм = 9,81 Дж$).

У деяких випадках, при визначенні моменту сили відносно точки, зручно розкласти цю силу на складові. За теоремою Варіньона:

Якщо система сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, має рівнодійну, то момент рівнодійної відносно довільного центру (вісі) дорівнює сумі моментів усіх сил системи відносно того ж центру (вісі).

$$m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) + \dots = \sum m_o(\vec{F}_k). \quad (1.5)$$

Нехай сила F прикладена до точки C під кутом α до осі Ax (рис. 1.15). За визначенням, момент сили F відносно точки A дорівнює $m_A(\vec{F}) = F \cdot h$

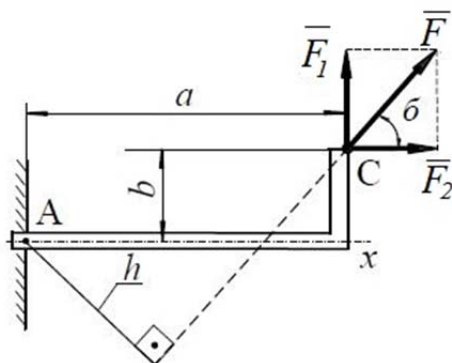


Рис. 1.15.

Оскільки, знаходження плеча h з рис. 1.15. потребує геометричних викладок, то розкладемо силу F на складові F_1 і F_2 , плечі яких відносно точки A визначити буде неважко:

$$F_1 = F \cdot \sin \alpha; F_2 = F \cdot \cos \alpha . \quad (1.6)$$

За теоремою Варіньона:

$$m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}_1) + m_A(\bar{F}_2), \quad (1.7)$$

$$\text{де } m_A(\bar{F}_1) = F_1 \cdot a; m(\bar{F}_2) = -F_2 \cdot b; \quad (1.8)$$

тоді:

$$m_A(\bar{F}) = F \cdot a \cdot \sin \alpha - F \cdot b \cdot \cos \alpha . \quad (1.9)$$

Парою сил називається система двох паралельних сил, які рівні за модулем, направлені в протилежні сторони і не лежать на одній прямій (рис. 1.16). Найкоротша відстань h між лініями дії цих сил називається плечем пари.

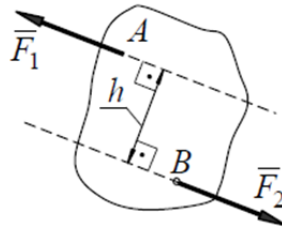


Рис. 1.16.

Мірою дії пари сил є алгебраїчна величина, яку називають моментом пари. Момент пари за модулем дорівнює добутку величини однієї з сил на плече пари:

$$m(\bar{F}_1, \bar{F}') = \pm F_1 \cdot h. \quad (1.10)$$

Якщо пара сил обертає площину креслення проти ходу годинникової стрілки, то момент пари додатній, а якщо за ходом – то від'ємний.

Теорія пар на площині зводиться до 4-х теорем:

Теорема 1. Алгебраїчна сума моментів сил, що складають пару, відносно довільної точки площини, в якій діє пара, не залежить від вибору цієї точки і дорівнює моменту пари.

Ця теорема пояснює, чому при обчисленні моментів сил відносно будь якої точки в рівняння моментів додається момент пари, що діє на об'єкт рівноваги.

Теорема 2. Не порушуючи стан твердого тіла, пару сил можна переносити у площині її дії в будь яке місце.

Теорема 3. Пари сил, моменти яких рівні – еквівалентні, тобто чинять на тіло однакову дію.

Теорема 4. При додаванні декількох пар сил на площині знаходиться рівнодійна пара, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар, що додаються.

Головним моментом системи сил називається алгебраїчна сума моментів сил системи відносно точки приведення($T.O$):

$$M_0 = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n; \quad (1.11)$$



Розглянемо зведення системи плоских сил до головних силових факторів (рис. 1.17). У точці O (точки приведення) додаємо зрівноважені сили, рівні прикладеним. Бачимо, що сили \vec{F}_1 та \vec{F}_1'' , \vec{F}_2 та \vec{F}_2'' , \vec{F}_3 та \vec{F}_3'' утворюють пари сил, які можна замінити відповідними моментами: M_1, M_2, M_3 . Отримуємо систему збіжних сил та систему моментів сил, які відповідно замінюються через головний вектор сил та головний момент. Таким чином, довільна система сил може бути зведена до головного вектору сил та головного моменту сил відносно довільно обраної точки O .

Точка приведення вибирається довільно. При зміні положення точки приведення величина головного вектору не зміниться, а величина головного моменту зміниться, так як змінюються відстані векторів сил до нової точки приведення.

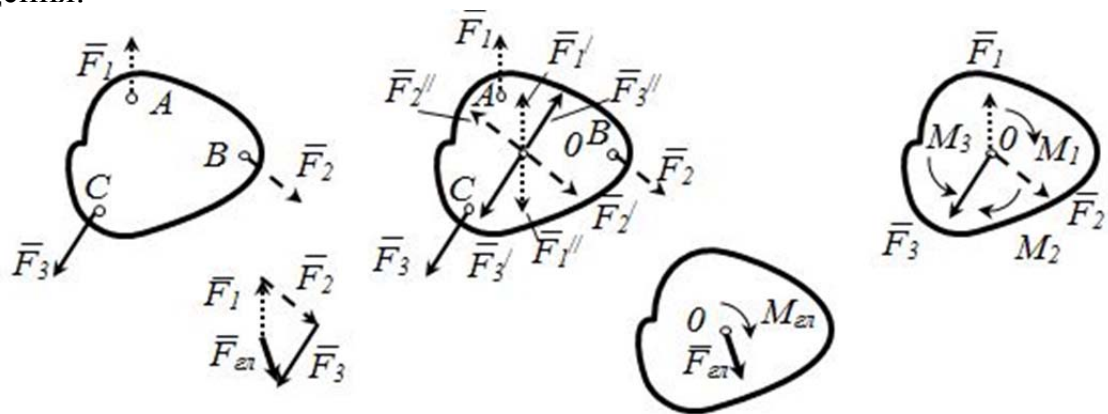


Рис. 1.15. До зведення системи плоских сил.

На підставі теореми Варіньона про момент рівнодійної можна визначити точку на площині, відносно якої головний момент дорівнює нулю. Тоді довільна плоска система може бути замінена однією силою – рівнодійною системи сил. Чисельне рівнодійна дорівнює головному вектору системи сил, але прикладена до іншої точки, відносно якої головний момент дорівнює нулю.

Значення рівнодійної визначається:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k. \quad \vec{R} = \vec{F}_3 = \sum \vec{F}_R \quad (1.12)$$

Можливо кілька варіантів при приведенні системи сил до точки:

1. $R = 0; M_0 \neq 0 \rightarrow$ тіло обертається навколо нерухомої осі;
2. $M_0 = 0; R \neq 0; \rightarrow$ тіло рухається прямолінійно прискорено;
3. $M_0 \neq 0; R \neq 0; \rightarrow$ тіло рухається прямолінійно прискорено і обертається (плоскопаралельний рух);
4. $M_0 = 0; R = 0 \rightarrow$ тіло знаходиться в рівновазі.

Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил виражаються трьома рівняннями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Умови рівноваги формулюються так: *довільна плоска система сил знаходиться в рівновазі, якщо алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини дії сил дорівнюють нулю.*

Друга форма: для рівноваги системи сил, як завгодно розташованої на площині, необхідно і достатньо, щоб порізно дорівнювали нулю суми моментів всіх сил відносно кожної з трьох точок площини, довільно вибраних, але таких, що не лежать на одній прямій:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Третя форма: для рівноваги системи сил, довільно розташованих на площині, необхідно і достатньо, щоб порізно дорівнювали нулю сума проєкцій всіх сил на одну яку-небудь вісь і суми моментів всіх сил відносно двох точок площини, обраних довільно, але таких, що не лежать на прямій, перпендикулярній до взятої вісі проєкцій:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_{O_1}(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_{O_2}(\bar{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Задачі на рівновагу довільної плоскої системи сил, що прикладена до твердого тіла, рекомендується розв'язувати в наступному порядку:

1. Встановити, рівновагу якого тіла треба розглянути.
2. Встановити і позначити на рисунку активні сили, що діють на тіло, та їх напрями.
3. З'ясувати характер в'язей та можливі напрями їх реакцій.
4. Скласти відповідні рівняння рівноваги. При цьому рекомендується:
 - при складанні рівнянь проєкцій одну з координатних осей направити перпендикулярно до однієї з невідомих реакцій;



- при складанні рівняння моментів за центр моментів обрати таку точку, в якій перетинаються максимальна кількість ліній дії невідомих сил;
- в залежності від конкретних умов система рівнянь може бути представлена як сукупність двох рівнянь сум моментів відносно двох будь яких точок тіла та одного рівняння проєкцій на вісь, або трьох рівнянь моментів(1.13 – 1.15).

5. Розв'язавши систему рівнянь рівноваги, визначити невідомі величини.

У випадку, якщо для розв'язку системи використані два рівняння, зробити перевірку, підставивши визначені значення в третє рівняння.

Приклад розв'язку задач

На балку діють рівномірно розподілене навантаження $q=20$ кН/м, зосереджена сила $F=30$ кН та момент пари сил $M=10$ кНм (рис. 1.16). Геометричні параметри: $a=1$ м, $b=3$ м, $c=2$ м. Визначити опорні реакції.

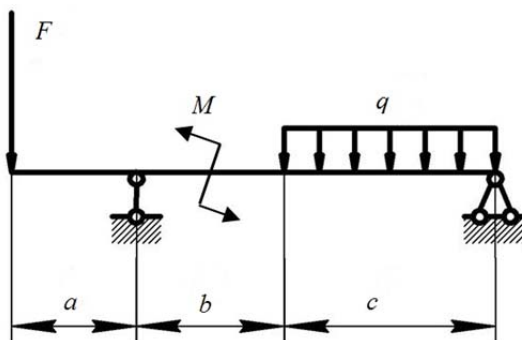


Рис. 1.16.

Складемо розрахункову схему (рис. 1.17). Дію розподіленого навантаження q замінимо на дію зосередженої сили $Q=q \cdot c=20 \cdot 2=40$ кН. Проведемо вісі координат x , y . Для визначення реакції в'язів попередньо встановимо напрями дії реакцій опор R_B (рухома опора), R_A (шарнірна опора). Слід врахувати, що в нашому випадку відсутні активні сили, що мають складові, які діють у напрямку осі y .

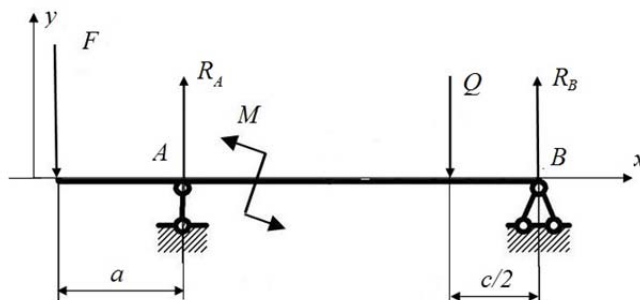


Рис. 1.17.

Визначаємо опорні реакції з наступних рівнянь (рис. 1.17):

$$\Sigma M_A = 0; \quad F \cdot 1 + M - Q \cdot 4 + R_B \cdot 5 = 0, \text{ звідки } R_B = 0,2(4Q - F - M);$$

$$R_B = 0,2(4 \cdot 40 - 30 - 10) = 24 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad F \cdot 6 + M + Q \cdot 1 - R_A \cdot 5 = 0, \text{ звідки } R_A = 0,2(6F + M + Q);$$

$$R_A = 0,2(30 \cdot 6 + 10 + 40) = 46 \text{ кН}.$$

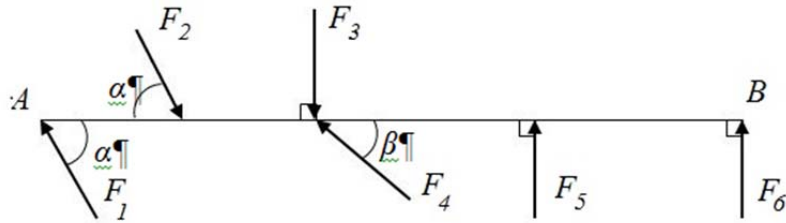
Виконаємо перевірку правильності значень опорних реакцій з умови:

$$\Sigma F_{yi} = 0; \quad R_A + R_B - Q - F = 46 + 24 - 40 - 30 = 0.$$

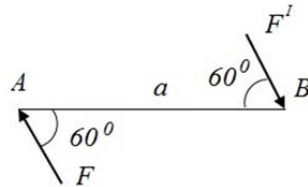
Таким чином, опорні реакції $R_A=46$ кН, $R_B=24$ кН.

Питання для самоконтролю

1. Яка система сил називається довільною?
2. Як визначається головний вектор системи сил?
3. Що розуміють під «моментом сили»?
4. Як визначається модуль та знак моменту сил?
5. Чи зміниться момент сили відносно даної точки при перенесенні сили вздовж лінії її дії?
6. У якому випадку момент сили відносно даної точки дорівнює нулю?
7. Що таке «момент пари сил»?
8. Яка властивість моменту пари сил?
9. Які сили утворюють пари сил, якщо $F_1=1$ кН, $F_2=1$ кН, $F_3=5$ кН, $F_4=1$ кН, $F_5=4,5$ кН, $F_6=9$ кН?



10. Визначить момент пари сил, якщо $F=5$ кН, $F^l=5$ кН, $a=6$ м.



11. Як визначається головний момент сил?
12. Вкажіть умови рівноваги довільної системи сил?

1.1.4. Статична рівновага твердого тіла

Якщо тверде тіло знаходиться біля поверхні Землі, то на кожную матеріальну частинку цього тіла діє сила тяжіння ΔG_i , яка спрямована до центра Землі.

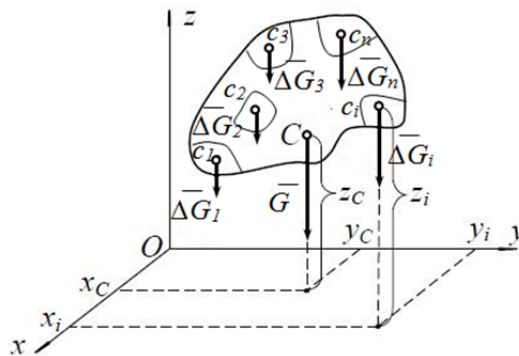


Рис. 1.18.



Оскільки розміри тіла невеликі у порівнянні з розмірами Землі, то утворену систему сил можна розглядати як паралельну. Рівнодійна цієї паралельної системи сил G , яка дорівнює їх сумі, називається вагою тіла, а точка прикладення рівнодійної (точка C) - називається центром ваги тіла (рис. 1.18).

Координати центра тяжіння твердого тіла можна визначити як координати центра паралельних сил:

$$x_c = \frac{x_1 \cdot \Delta G_1 + x_2 \cdot \Delta G_2 + \dots + x_n \cdot \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n} = \frac{\sum x_i \cdot \Delta G_i}{G}; \quad (1.16)$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot \Delta G_1 + y_2 \cdot \Delta G_2 + \dots + y_n \cdot \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n} = \frac{\sum y_i \cdot \Delta G_i}{G}; \quad (1.17)$$

$$z_c = \frac{z_1 \cdot \Delta G_1 + z_2 \cdot \Delta G_2 + \dots + z_n \cdot \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n} = \frac{\sum z_i \cdot \Delta G_i}{G}. \quad (1.18)$$

де ΔG_i - сила тяжіння елементарної частинки тіла, G - вага тіла;

x_c, y_c, z_c - координати центра тяжіння;

x_i, y_i, z_i - координати елементарної частинки тіла.

Якщо тіло однорідне, тобто питома вага не змінюється за об'ємом ($\rho = \text{const}$), то:

$$G = \rho g V; \quad \Delta G_i = \rho g \Delta V_i, \quad (1.19)$$

де V - об'єм тіла;

ΔV_i - об'єм елементарної частинки.

Тоді формули для визначення координат центра тяжіння твердого тіла набудуть вигляду:

$$x_c = \frac{\sum x_i \cdot \Delta V_i}{V}; \quad y_c = \frac{\sum y_i \cdot \Delta V_i}{V}; \quad z_c = \frac{\sum z_i \cdot \Delta V_i}{V}. \quad (1.20)$$

Положення центра тяжіння однорідного тіла залежить лише від форми об'єму, що займає тіло, і називається центром тяжіння цього об'єму.

Якщо однорідне тіло має форму тонкої пластини, то його можна розглядати як матеріальну плоску фігуру. У цьому випадку положення центра тяжіння плоскої фігури визначається двома координатами x_c та y_c і залежить від форми фігури:

$$x_c = \frac{\sum x_i \cdot \Delta F_i}{F}; \quad y_c = \frac{\sum y_i \cdot \Delta F_i}{F} \quad (1.21)$$

де ΔF_i - площа елементарної частини плоскої фігури;

F - площа плоскої фігури.

Найбільш поширений спосіб визначення положення центра тяжіння однорідного тіла складної форми полягає у тому, що його розбивають на такі частини, положення центрів тяжіння яких відомо, або може бути легко визначене. Наприклад, однорідну плоску фігуру (рис. 1.19) розбивають на три частини 1, 2 і 3, положення центрів тяжіння яких (C_1, C_2, C_3) відомі.

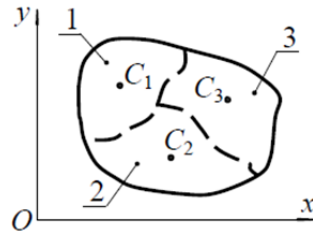


Рис. 1.19.

Тоді координати центра тяжіння фігури C визначається за формулами:

$$x_c = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}; y_c = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}. \quad (1.22)$$

де x_1, y_1 - координати центра тяжіння C_1 першої частини плоскої фігури; F_1 - площа першої частини і т. д.

Цим способом зручно користуватися і при визначенні положення центра тяжіння плоскої фігури, з якої вирізана деяка частина (рис. 1.20). У цьому випадку, площу плоскої фігури можна записати у вигляді різниці площ суцільної фігури 1 (площа додатня) і вирізаної частини 2 (площа від'ємна), тобто $F = F_1 - F_2$.

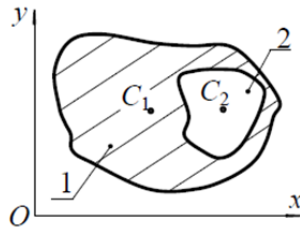


Рис. 1.20.

Координати центра тяжіння фігури дорівнюють:

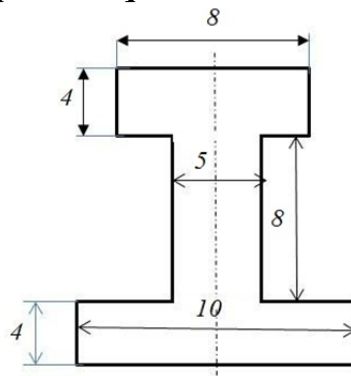
$$x_c = \frac{x_1 \cdot F_1 - x_2 \cdot F_2}{F_1 - F_2}, y_c = \frac{y_1 \cdot F_1 - y_2 \cdot F_2}{F_1 - F_2}. \quad (1.23)$$

де x_1, y_1 - координати центра тяжіння суцільної фігури 1, площа якої дорівнює F_1

x_2, y_2 - координати центра тяжіння вирізаної частини 2, площа якої дорівнює F_2 .

Перший з цих методів має назву “метод розбиття”, другий – “метод доповнення” або “метод від'ємних мас”.

Приклад розв'язання задач



Визначити координати центра ваги фігури. Розміри задані в сантиметрах.



По-перше розділимо фігури на три прямокутника рис. 1.21. Проведемо вісі координат, якщо фігура симетрична, то одну з осей доцільно провести за віссю симетрії.

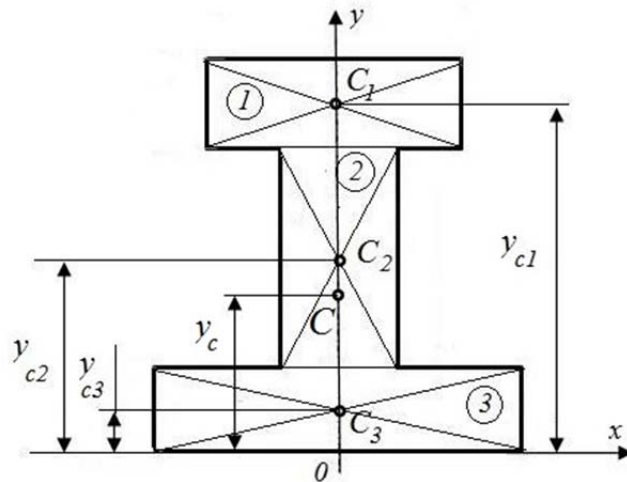


Рис.1.21.

Відповідно до прийнятої схеми та заданих геометричних розмірів координати центрів ваги складових фігур складають

$$x_{c1} = x_{c2} = x_{c3} = 0;$$

$$y_{c1} = 2 \text{ см}; y_{c2} = 6 \text{ см}; y_{c3} = 10 \text{ см}.$$

Площі простих фігур $F_1 = 32 \text{ см}^2$, $F_2 = 40 \text{ см}^2$, $F_3 = 40 \text{ см}^2$.

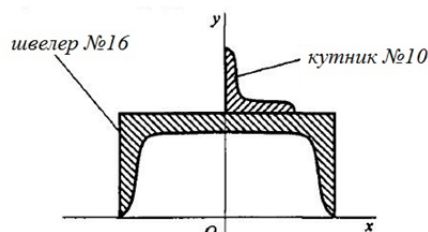
За формулою 1.22 визначаємо координати центра тяжіння

$$x_c = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0 \cdot 32 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 40}{32 + 40 + 40} = 0;$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{2 \cdot 32 + 6 \cdot 40 + 10 \cdot 40}{32 + 40 + 40} = 6 \text{ см}$$

Питання для самоконтролю

1. Яку властивість має центр паралельних сил ?
2. За якими формулами обчислюються координати центра паралельних сил ?
3. Як визначається положення центру тяжіння плоскої фігури, якщо відомі положення центрів тяжіння окремих її частин ?
4. Якими допоміжними теоремами користуються при визначенні положення центру тяжіння ?
5. Визначіть координату центру ваги для конструкції



При розв'язуванні задачі використовуйте довідкові таблиці по геометричним характеристикам стандартного прокату (додаток А).

1.1.5. Рівновага тіл з урахуванням сили тертя

При переміщенні одного тіла по поверхні іншого завжди виникає сила, яка заважає руху тіла і називається силою тертя ковзання.

У інженерних розрахунках силу тертя ковзання завжди треба враховувати. При цьому виходять із встановлених експериментальним шляхом загальних законів тертя ковзання у спокої, які формулюються наступним чином:

1. Гранична сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску одного тіла на друге:

$$F_{\text{тр.гр.}} = f \cdot N, \quad (1.24)$$

де f – статичний коефіцієнт тертя.

2. Статичний коефіцієнт тертя залежить від матеріалів поверхонь, що труться, та їх фізичного стану.

3. Сила тертя не залежить від площі поверхні, за якою дотикаються тіла, що труться.

Таким чином, коли розглядають рівновагу сил, що діють на тверде тіло, яке знаходиться на шорсткій поверхні, то, на відміну від гладкої поверхні, треба враховувати складову реакції шорсткої поверхні – силу тертя.

Сила T (рис.1.24) намагається змістити тіло, до якого вона прикладена, відносно другого. Реакція поверхні R_1 , що виникає в точках дотику цих тіл, буде відхилятися на деякий кут α від нормалі до поверхні ковзання. Нормальна складова реакції N завжди дорівнює за модулем силі нормального тиску одного тіла на друге. Величина сили тертя F_1 (дотичної сили) залежить від величини та напрямку сили T , яка намагається зсунути тіло. Таким чином, сила тертя у нерухомому положенні тіла може змінюватися від 0 ($T=0$) до максимального значення, після якого порушується статична рівновага $F_{\text{тр.гр.}}$, тобто:

$$0 \leq F_1 \leq F_{\text{тр.гр.}} = f \cdot N. \quad (1.25)$$

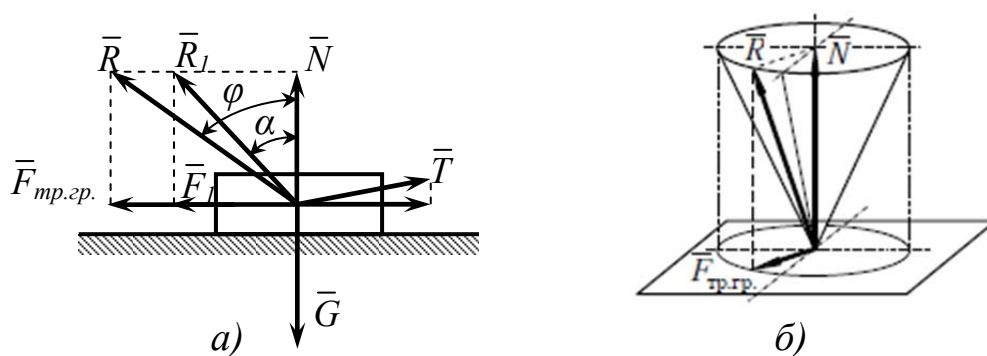


Рис. 1.24. Розрахункова схема статичної рівноваги під дією сили тертя.

У випадку коли, F_1 досягає граничного значення $F_{\text{тр.гр.}}$, повна реакція в'язі R відхиляється на кут φ , який називають кутом тертя:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр.гр.}}}{N} = \frac{N \cdot f}{N} = f. \quad (1.26)$$

Таким чином, тангенс кута тертя чисельно дорівнює коефіцієнту тертя. Якщо зсуваюча сила буде більшою за $F_{\text{тр.гр.}}$, то тіло почне ковзати. У

залежності від напрямку дії зсуваючої сили. При граничному стані спокою рівнодійна сила R завжди буде лежати на поверхні конуса, який називають конусом тертя (рис. 1.24,б).

Тобто, якщо лінія дії рівнодійної активних сил, що прикладені до твердого тіла, буде лежати всередині конуса тертя то, незалежно від модуля цієї сили, тіло буде зберігати стан спокою. Це пояснюється тим, що в цьому випадку складова рівнодійної, що намагається зсунути тіло, буде меншою за граничну силу тертя.

Оскільки сила тертя може набувати значень від нуля до граничного значення, то рівняння рівноваги твердого тіла при наявності сили тертя перетворюються у нерівності.

У зв'язку з цим, при розв'язуванні задач, як правило, розглядають випадок, коли сила тертя набуває граничного значення і з рівнянь рівноваги визначають граничні (найбільші і найменші) значення невідомих величин.

Приклад розв'язання задач.

Шорстка площина (рис. 1.25) нахилена до горизонту на такий кут α , при якому тіло, що знаходиться на цій площині, ковзає донизу із сталою швидкістю, яку йому надали на початку руху. Тіло будемо вважати матеріальною точкою. Визначити коефіцієнт тертя f між тілом і площиною.

Розв'язок. Якщо тіло рухається рівномірно і прямолінійно, то система сил, що діє на тіло, знаходиться в рівновазі.

На тіло діють активна сила тяжіння G і реакція поверхні AB , яку розкладемо на нормальну реакцію N і силу тертя F_{mp} . Сила тертя напрямлена в протилежний бік від напрямку руху тіла.

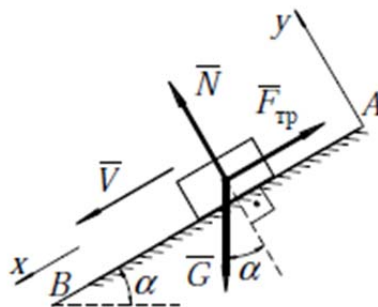


Рис. 1.25.

Виберемо систему координат: вісь Ax направимо вздовж похилої площини за напрямом руху тіла, а вісь Ay – перпендикулярно до площини.

Система сил, що діє на тіло, є плоскою збіжною, тоді рівняння рівноваги для даної системи сил буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sum F_{x,i} &= G \sin \alpha - F_{mp} = 0 \\ \sum F_{y,i} &= N - G \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

З рівнянь визначаємо силу тертя і силу нормального тиску:

$$\begin{aligned} F_{mp} &= G \sin \alpha \\ N &= G \cos \alpha \end{aligned}$$

Відомо, що гранична сила тертя визначається:

$$F_{mp.} = f \cdot N,$$

тоді отримуємо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N} = \frac{G \sin \alpha}{G \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Питання до самоконтролю

1. Що називається силою тертя?
2. Від яких основних параметрів залежить сила тертя?
3. Що називається кутом тертя?
4. Що називається конусом тертя?
5. Які можливі напрями реакції шорсткої поверхні?
6. Як повинна бути направлена рівнодійна активних сил по відношенню до конуса тертя, щоб тіло почало рухатися?

1.2. КІНЕМАТИКА

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, що вивчає способи опису руху матеріальних тіл без урахування їхньої маси, сил, які діють на них і причин виникнення руху.

1.2.1. Кінематичні рівняння руху

Визначити рух точки – це значить вказати правило, за яким у будь який момент часу t можна визначити положення точки в просторі.

Розрізняють три способи визначення руху точки: координатний, векторний, природний.

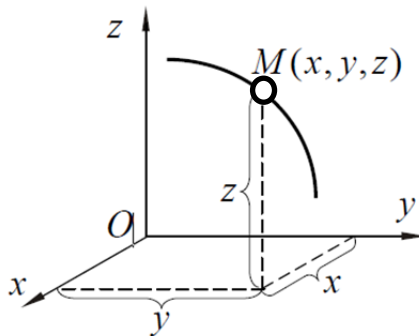


Рис.1.27.

Координатний спосіб визначення руху точки. Положення точки M у просторі при координатному способі визначення руху описується трьома координатами: x , y , z (рис.1.27). Якщо точка рухається, то ці координати з часом безперервно змінюються. Таким чином, для визначення руху точки достатньо задати функціональні залежності виду:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t) \\ z &= f(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$



Рівняння (1.27) називаються *рівняннями руху* точки в прямокутних координатах. Рух точки в площині, наприклад Oxy , визначається двома рівняннями руху:

$$x = f_1(t); y = f_2(t). \quad (1.28)$$

Для визначення прямолінійного руху точки, наприклад, по осі Ox , достатньо одного рівняння:

$$x = f_1(t). \quad (1.29)$$

Траєкторією називається та сукупність точок, через які послідовно проходить тіло під час руху в даній системі відліку.

Траєкторія – одна з основних характеристик, яка дає уявлення про рух в цілому. Першою ознакою, за якою класифікуються рухи, є траєкторія. Визначення траєкторії є однією із важливих частин задач механіки. У залежності від форми траєкторії рух відносять до прямолінійного або криволінійного руху.

Рівняння руху точки (1.27) ÷ (1.29) можна розглядати як рівняння траєкторії у параметричній формі. Для того, щоб отримати рівняння траєкторії в звичайній формі, треба з рівнянь руху виключити час t . Так, виключивши t з рівнянь руху (1.28), отримуємо одне рівняння, яке являє собою рівняння лінії на площині Oxy :

$$F(x, y) = 0. \quad (1.30)$$

Якщо виключити час t з рівнянь руху (1.27), то отримуємо рівняння виду:

$$F_1(x, y, z) = 0; F_2(x, y, z) = 0. \quad (1.31)$$

Кожне з рівнянь системи (1.31) є рівнянням деякої поверхні, а разом – рівнянням траєкторії, яка являє собою лінію перетину цих поверхонь.

Швидкість точки – векторна величина, яка характеризує зміну положення точки в просторі з часом.

Прискорення точки – векторна величина, яка характеризує зміну вектору швидкості з часом.

У випадку координатного способу модуль швидкості точки визначається за відомими рівняннями для координат точки (1.27) через проєкції вектору швидкості на координатні вісі:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1.32)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.33)$$

Напрямок вектору швидкості визначається через косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат:

$$\cos(x, v) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(y, v) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(z, v) = \frac{v_z}{v}. \quad (1.34)$$

Проекції вектору прискорення на координатні вісі відповідно дорівнюють:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1.35)$$

Модуль вектору прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.36)$$

Напрямок вектору прискорення також визначається через косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними вісями координат:

$$\cos(x, a) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(y, a) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(z, a) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.37)$$

Природний спосіб визначення руху точки полягає в наступному.

1. Будь яким способом (рівнянням, графічно, вказівкою) задається траєкторія точки M_0B (рис. 1.28).

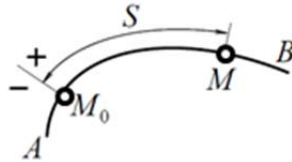


Рис. 1.28.

2. На траєкторії обирається деяка точка M_0 як початок відліку і додатний напрям вздовж траєкторії (на рис. 1.28 зліва направо).

3. Положення точки M на траєкторії однозначно визначається довжиною дуги $S = M_0M$, яку беруть з відповідним знаком. При русі точки за траєкторією кожному моменту часу t відповідає певне значення S .

Таким чином, для визначення положення точки на траєкторії достатньо задати залежність:

$$S = f(t), \quad (1.38)$$

яка називається природним рівнянням руху.

Природним способом визначення руху точки зручно користуватися в тому випадку, коли відома траєкторія точки.

У випадку природного способу визначення руху точки за відомим рівнянням руху (1.38) модуль вектору швидкості визначають за формулою:

$$v = \frac{dS}{dt} \quad (1.39)$$

Вектор швидкості завжди напрямлений за дотичною до траєкторії руху точки в бік відліку координати S (рис. 1.29).

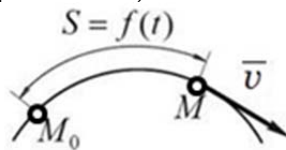


Рис. 1.29.

Для визначення прискорення з точкою M пов'язують рухому систему координат $\bar{n} - \bar{\tau}$ (рис.1.30): тангенціальну вісь $\bar{\tau}$ спрямовують за дотичною до траєкторії в бік напрямку швидкості точки; нормальну вісь \bar{n} - за внутрішньою нормаллю до траєкторії (тобто, в бік центра її кривизни).

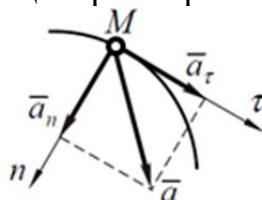


Рис. 1.30.



Прискорення \bar{a} розкладають на складові a_τ і a_n по вісям обраної системи координат, які відповідно називають дотичним (тангенціальним) і нормальним (доцентровим) складовими прискорення. За модулем ці прискорення, відповідно, дорівнюють:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1.40)$$

де ρ - радіус кривизни траєкторії $S = f(t)$.

Нормальне прискорення завжди напрямлено до центру кривизни (за напрямом осі \bar{n}), а дотичне прискорення – за віссю $\bar{\tau}$, якщо $a_\tau > 0$, і в протилежний бік, якщо $a_\tau < 0$.

Нормальне прискорення характеризує зміну напрямку швидкості з плином часу. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, тобто $\rho = \infty$, то $a_n = 0$ і вектор швидкості не буде змінювати свого напрямку.

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною з плином часу. Якщо точка рухається рівномірно ($v = v_0 = const$), то $a_\tau = 0$, а шлях, що пройдено точкою, визначають за формулою:

$$S = S_0 + v_0 \cdot t. \quad (1.41)$$

У випадку рівномірно прискореного руху точки ($a_\tau = const$) швидкість точки і шлях, який пройдено нею, визначають за формулами:

$$v = v_0 + a_\tau t; \quad (1.42)$$

$$S = S_0 + v_0 t + a_\tau t^2 / 2. \quad (1.43)$$

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, що незмінно пов'язана з тілом, увесь час залишається паралельною своєму початковому положенню.

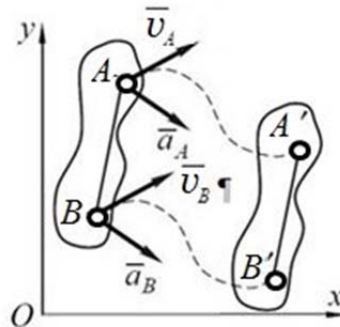


Рис. 1.31.

Для твердого тіла (рис. 1.31) пряма AB , що з'єднує дві довільні його точки, під час поступального руху не змінюється ні за довжиною, ні за напрямом. Це означає, що при поступальному русі точки A та B тіла мають однакові траєкторії (при накладанні збігаються) і в кожний момент часу однаковими будуть їх швидкості і прискорення, тобто:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B \quad \text{і} \quad \bar{a}_A = \bar{a}_B. \quad (1.45)$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом будь-якої точки цього тіла, тобто задача визначення кінематичних характеристик поступального руху твердого тіла зводиться до задачі кінематики точки.

Кінематика обертального руху. Обертальним рухом називається такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки тіла залишаються нерухомими.

Якщо закріпити дві точки тіла O_1 і O_2 (рис.1.32,*а*), то будуть нерухомими всі точки прямої O_1O_2 , яка називається віссю обертання.

Траєкторіями усіх інших точок тіла, наприклад M , будуть кола з центрами на вісі обертання. Проведемо через вісь обертання zz (рис.1.32,*б*) дві площини: одну нерухому A , а другу площину B жорстко пов'яжемо з тілом, що обертається.

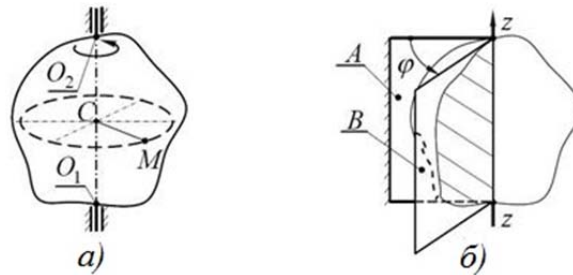


Рис. 1.32.

Двогранний кут φ між цими двома площинами однозначно визначає положення тіла, що обертається.

Для визначення знаку кута φ на осі обертання zz обирають додатний напрям (рис. 1.32). Кут вважається додатним, якщо з додатного напрямку вісі обертання він відносно нерухомої площини відкладений проти ходу годинникової стрілки і від'ємний, якщо за ходом.

Коли тіло обертається, кут φ безперервно змінюється з часом. Таким чином, для повної характеристики обертального руху треба задати рівняння виду:

$$\varphi = f(t). \quad (1.46)$$

Рівняння (1.46) називається *рівнянням обертального руху тіла*. Зміну кута повороту тіла з плином часу характеризує кутова швидкість .

Миттєва кутова швидкість ω є першою похідною від кута повороту за часом:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.47)$$

Одиницею вимірювання кутової швидкості є радіан, поділений на секунду, і позначається rad/c або c^{-1} , або $1/c$.

Направлена кутова швидкість у бік миттєвого обертання тіла $\omega > 0$, якщо збігається з напрямом відліку кута φ ; $\omega < 0$, якщо протилежна напрямку відліку φ .

Кут повороту пропорційний кількості обертів N , що зробило тіло за деякий проміжок часу. У цьому випадку кут повороту тіла φ в радіанах можна знайти за залежністю:

$$\varphi = 2\pi N. \quad (1.48)$$

Кутову швидкість обертання тіла часто задають числом обертів за одну хвилину n (*об/хв*). Залежність для переходу до системних одиниць кутової швидкості має вигляд:



$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \quad \text{рад/с} \quad (1.49)$$

де n – швидкість обертання, об/хв .

Зміну кутової швидкості з плином часу характеризує кутове прискорення ε .

Миттєве кутове прискорення ε визначається як перша похідна від кутової швидкості за часом або друга похідна від кута повороту тіла:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.50)$$

Одиницею вимірювання кутового прискорення є радіан, поділений на секунду в квадраті, і позначається рад/с^2 , або $1/\text{с}^2$, або с^{-2} .

Направлене кутове прискорення за напрямом кутової швидкості, якщо знаки ω та ε збігаються, і проти напрямку кутової швидкості, якщо знаки ω та ε різні.

У випадку рівномірного обертального руху тіла його кутова швидкість буде сталою ($\omega = \text{const}$), а кутове прискорення дорівнює нулю ($\varepsilon = 0$).

Кут повороту тіла у цьому випадку обчислюється за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t, \quad (1.51)$$

де φ_0 - початковий кут повороту тіла при $t = 0$.

У випадку рівномірно змінного обертального руху тіла його кутове прискорення буде сталим ($\varepsilon = \text{const}$).

Кутова швидкість і кут повороту тіла у цьому випадку обчислюються за формулами:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t; \quad (1.52)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \varepsilon \cdot t^2 / 2, \quad (1.53)$$

де φ_0 , ω_0 - відповідно кут повороту тіла і кутова швидкість в момент часу $t=0$.

Якщо для тіла, що обертається, відомі кутова швидкість ω і кутове прискорення ε , то можна знайти швидкість v і прискорення a будь якої його точки.

Швидкість точки тіла, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від точки до осі обертання:

$$v = \omega \cdot R. \quad (1.54)$$

Вектор швидкості точки v напрямлений під прямим кутом до радіуса обертання OM (рис. 1.33) в бік обертання тіла (в бік кутової швидкості ω).

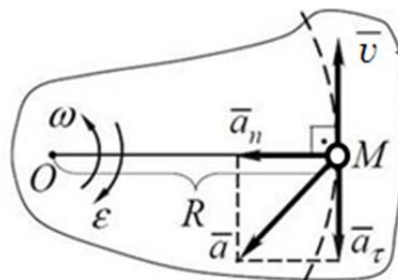


Рис. 1.33.

Оскільки точка тіла, що обертається, рухається вздовж криволінійної траєкторії (коло з радіусом кривизни R), то прискорення точки a можна розкласти на дві складові: тангенціальну (дотичну) a_τ і нормальну (доцентрову) a_n (рис. 1.33).

Підставивши у формули для a_τ і a_n (1.40) вираз (1.54) отримаємо :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \varepsilon R ; \quad (1.55)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R . \quad (1.56)$$

Нормальне прискорення a_n направлене від точки вздовж радіуса до центра обертання. Дотичне прискорення a_τ спрямоване перпендикулярно до радіусу у бік кутового прискорення ε .

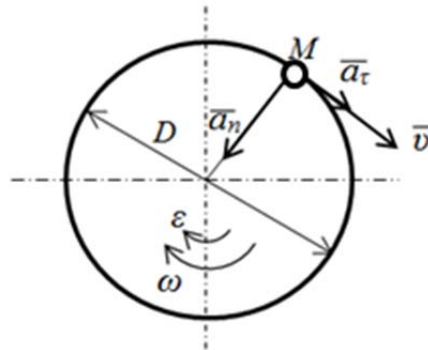
Повне ж прискорення точки відповідно дорівнює:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \quad (1.57)$$

Приклад розв'язування задач

Шків пасової передачі діаметром $D=200$ мм починає обертатися із стану спокою з сталим кутовим прискоренням і через 5 хвилин від початку руху має кутову швидкість, яка відповідає 1200 об/хв . Визначити число обертів N_1 , які зробив шків за 5 хвилин, лінійну швидкість та прискорення на точках зовнішньої поверхні шківа у момент часу $t=3$ хв.

Складемо розрахункову схему.



Число обертів N_1 можна визначити, якщо відомий кут φ_1 , на який повернувся шків за 5 хвилин. Оскільки:

$$\varphi = 2\pi N , \text{ то } N_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} .$$

Кут повороту тіла при рівноприскореному обертанні дорівнює:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Так як, $\varphi_0=0$, $\omega_0=0$, то:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Для визначення прискорення скористаємося залежністю кутової швидкості від часу обертання



$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t; \text{ звідки для наших умов } \varepsilon = \frac{\omega}{t}.$$

Частота обертання в рад/с визначиться:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 1200}{30} = 125,6 \text{ рад/с}.$$

Кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{\omega_1}{t} = \frac{125,6}{300} = 0,42 \text{ рад/с}^2.$$

Кут повороту у момент часу $t = 5 \text{ хв.}$:

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{0,42 \cdot 300^2}{2} = 18900 \text{ рад. або } N_1 = \frac{18900}{2 \cdot 3,14} = 3009,5 \text{ об.}$$

Кутова швидкість у момент часу $t_2 = 3 \text{ хв.}$:

$$\omega_2 = \varepsilon \cdot t = 125,6 \cdot 0,42 = 52,75 \text{ рад/с}.$$

Лінійна швидкість в момент часу $t_2 = 3 \text{ хв.}$:

$$v_2 = \omega_2 \cdot R = \omega_2 \cdot \frac{D}{2} = 52,75 \cdot \frac{0,2}{2} = 5,275 \text{ м/с}$$

Тангенціальне(дотичне) прискорення:

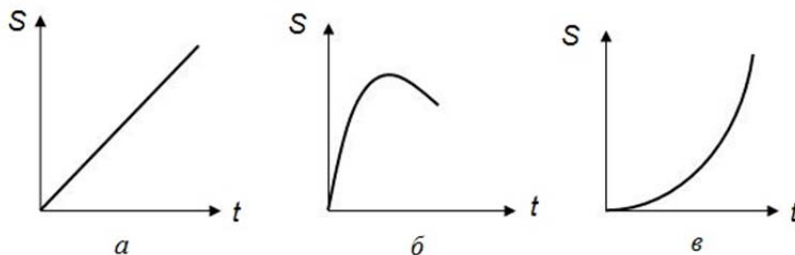
$$a_{\tau 2} = \varepsilon R = 0,42 \cdot 0,1 = 0,042 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне(доцентрове) прискорення:

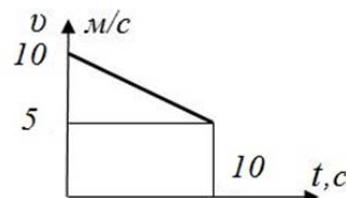
$$a_{n2} = \frac{v^2}{R} = \frac{5,275^2}{0,1} = 278,25 \text{ м/с}^2.$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається траєкторією?
2. Як за рівняннями руху точки у координатній формі визначити її траєкторію?
3. Що називається швидкістю та прискоренням точки?
4. У чому полягає природний спосіб визначення руху точки?
5. Що характеризують дотичне і нормальне прискорення точки?
6. При якому русі точки дорівнює нулю дотичне прискорення і при якому – нормальне прискорення.
7. Вкажіть, який графік відповідає рівноприскореному руху.



8. З графіку швидкості визначити час руху точки до повної зупинки. Рівняння руху залишається незмінним.



1.2.2. Складний рух

У деяких випадках доводиться розглядати рух точки відносно двох різних систем відліку. Наприклад, рух пасажира у потягу можна розглядати як по відношенню до потяга, так і по відношенню до Землі.

При цьому траєкторія руху однієї і тієї ж точки відносно двох різних систем відліку буде різною. Наприклад, точка ободу колеса залізничного вагона, що рухається відносно Землі, пише циклоїду, а відносно вагону – коло.

При розгляді руху точки по відношенню до двох систем відліку та система, яка у даній задачі умовно прийнята за нерухому, називається основною системою відліку (нерухомою), а система, яка рухається відносно основної, називається рухомою системою відліку.

Рух точки відносно основної системи відліку називається абсолютним рухом, а її рух відносно рухомої системи відліку – відносним рухом.

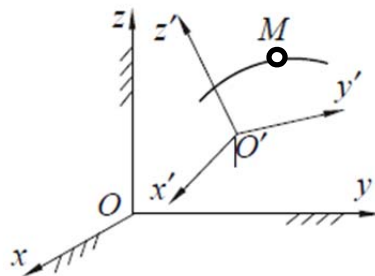


Рис. 1.34.

Нехай є дві системи координат $Oxyz$ і $O'x'y'z'$ та деяка рухома точка M (рис.1.34). Оберемо систему координат $Oxyz$ за основну. Тоді рух системи $O'x'y'z'$ відносно системи $Oxyz$ буде переносним. Рух точки M відносно системи $O'x'y'z'$ відносним, а рух точки M відносно системи $Oxyz$ буде абсолютним.

Треба зауважити, що переносним рухом є рух не самої точки M , а того тіла, з яким пов'язана рухома система координат $O'x'y'z'$, тоді як відносний і абсолютний рух є рухом самої точки M , який розглядається відповідно відносно рухомої і основної систем відліку. У переносному русі рухома система координат може мати будь-який вид руху.

Основна задача цього розділу полягає в тому, щоб за відомими відносним і переносним рухами визначити абсолютний рух точки (рух точки M відносно системи відліку $Oxyz$).

Вибір основної та рухомої систем відліку, а відповідно, і поділ руху точки на абсолютний та відносний залежить від постановки конкретної задачі. У більшості випадків за основну систему відліку беруть систему, яку пов'язано з Землею.

Відносною швидкістю $\bar{v}_{від.}$ точки називається її швидкість у відносному русі, тобто по відношенню до рухомої системи відліку.

Абсолютною швидкістю $\bar{v}_{абс.}$ точки називається її швидкість в абсолютному русі, тобто по відношенню до основної системи відліку.

Аналогічно введемо поняття відносного, абсолютного та переносного прискорення точки. Переносною швидкістю $\bar{v}_{пер.}$ називається швидкість



відносно основної системи відліку тієї точки рухомої системи відліку, з якою у даний момент часу збігається точка, що рухається.

Відносним прискоренням $\bar{a}_{від}$ точки називається її прискорення у відносному русі, тобто по відношенню до рухомої системи відліку.

Абсолютним прискоренням $\bar{a}_{абс}$ точки називається її прискорення в абсолютному русі, тобто по відношенню до основної системи відліку.

Переносним прискоренням $\bar{a}_{пер}$ називається прискорення відносно основної системи відліку тієї точки рухомої системи відліку, з якою у даний момент часу збігається точка, що рухається.

Звернемо увагу на те, що переносний рух – це рух усієї рухомої системи відліку, тобто деякого тіла, з яким пов'язана рухома система координат, а переносна швидкість і переносне прискорення – це швидкість і прискорення конкретної точки цього тіла.

Залежність між абсолютною, переносною та відносною швидкостями точки визначається теоремою додавання швидкостей, згідно із якою абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі переносної та відносної швидкостей:

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{від} + \bar{v}_{пер}. \quad (1.58)$$

Залежність між абсолютним, відносним і переносним прискоренням точки при поступальному русі рухомої системи відліку виражається векторним рівнянням:

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{від} + \bar{a}_{пер}. \quad (1.59)$$

Якщо переносним рухом є обертальний або складний, то теорема про додавання прискорень набуває вигляду:

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{від} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \quad (1.60)$$

де $a_{кор}$ – прискорення Коріоліса (поворотне прискорення точки).

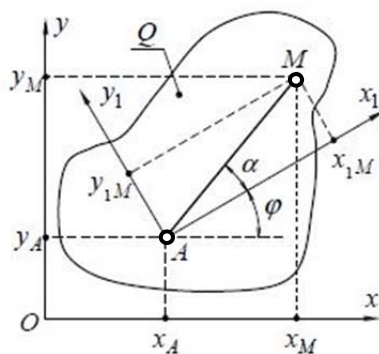


Рис.1.35.

Плоско-паралельним називається такий рух тіла, при якому траєкторії усіх його точок лежать у площинах, що паралельні до даної нерухомої площини.

При такому русі усі точки твердого тіла, що лежать на перпендикулярі до цієї площини, мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Плоский рух фігури (рис.1.35) можна розглядати як складний (тобто абсолютний) рух, який включає поступальний рух разом з довільно обраною

точкою A , що називається полюсом (переносний рух), і обертальний рух фігури навколо цієї точки (відносний рух).

Плоский рух твердого тіла описується рівняннями:

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); \varphi = f_3(t). \quad (1.61)$$

При цьому поступальна частина плоского руху описується двома першими рівняннями, а відносна обертальна навколо полюса – третім рівнянням.

Оскільки плоский рух тіла складається з поступального разом з полюсом і обертального навколо нього, то швидкість будь-якої точки тіла M геометрично складається з абсолютної швидкості \bar{v}_A точки A , яку прийнято за полюс, і відносної швидкості \bar{v}_{MA} у відносному обертальному русі точки M разом з тілом навколо точки A (рис.1.36):

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}. \quad (1.62)$$

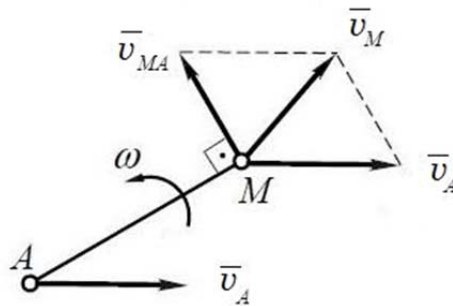


Рис.1.36.

Вектор відносної швидкості \bar{v}_{MA} точки M у відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса A напрямлений перпендикулярно до AM у бік кутової швидкості. Модуль і напрям абсолютної швидкості \bar{v}_M знаходиться побудовою відповідного паралелограма на векторах \bar{v}_A і \bar{v}_{MA} (рис.1.36). Такий шлях розв'язування векторного рівняння, коли за записаним рівнянням будують векторну фігуру, називається графоаналітичним.

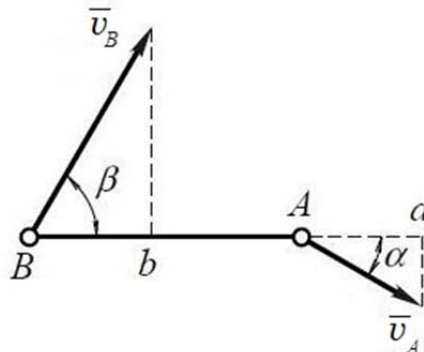


Рис.1.37.

Відносна швидкість \bar{v}_{MA} у відносному обертальному русі точки M разом з тілом навколо полюса A за модулем дорівнює:

$$v_{MA} = \omega \cdot MA, \quad (1.63)$$



де ω - кутова швидкість обертання тіла навколо полюса.

Знайти швидкість будь-якої точки тіла можна також на основі теореми, яка свідчить: проєкції швидкостей двох точок фігури на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою.

Згідно з цією теоремою: $Aa = Bb$, або $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$ (рис.1.37). Якщо відома швидкість v_A точки A тіла, то :

$$v_B = v_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (1.64)$$

При плоскому русі тіла в кожен момент часу існує точка тіла, швидкість якої дорівнює нулю. Ця точка називається миттєвим центром швидкостей і, як правило, позначається літерою P . Якщо миттєвий центр швидкостей відомий, то легко можна знайти миттєвий розподіл швидкостей усіх точок тіла (рис.1.38). Оскільки швидкість обраного полюса P дорівнює нулю ($\bar{v}_P = 0$), то:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{AP}; \quad \bar{v}_B = \bar{v}_{BP}. \quad (1.65)$$

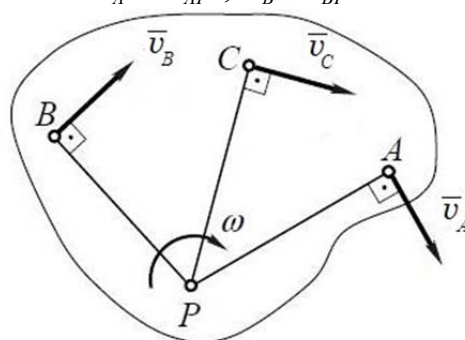


Рис.1.38.

За модулем швидкості обертання точок A і B навколо полюса P дорівнюють:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{AP} = \omega \cdot (PA); \quad \bar{v}_B = \bar{v}_{BP} = \omega (PB). \quad (1.66)$$

Порядок розв'язування задач:

а) розв'язування графоаналітичним методом:

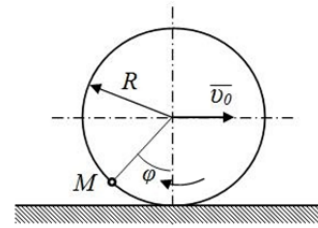
- обрати за полюс ту точку тіла, швидкість якої відома за величиною і напрямом або легко визначається з умов задачі;
- знайти точку тіла, напрям швидкості якої відомий;
- користуючись формулами плоского руху, знайти швидкість цієї точки;
- визначити кутову швидкість тіла у даний момент часу;
- за відомою кутовою швидкістю і швидкістю полюса, користуючись формулами плоского руху знайти швидкості інших точок тіла.

б) розв'язання за допомогою миттєвого центра швидкостей:

- визначити положення миттєвого центра швидкостей одним з відомих способів;
- визначити значення миттєвого радіуса тієї точки тіла, швидкість якої відома, та знайти кутову швидкість тіла;
- знайти швидкості інших точок тіла.

Приклад розв'язування задач

Колесо радіусом $R=0,3\text{ м}$ котиться без проковзування. Швидкість переміщення центру колеса складає $v_0=12\text{ м/с}$. Визначити миттєву швидкість на ободі колеса в т.М. Кут $\varphi=30^\circ$.



Рух точок колеса це плоскопаралельний рух. Приймавши за полюс центр колеса O , визначимо швидкість точки M , як суму векторів відносного та переносного рухів:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{MO} + \bar{v}_O$$

Відносна швидкість \bar{v}_{MO} - лінійна швидкість точки при обертотому русі. Вона напрямлена за дотичною до кола (рис.1.39.). Додавши вектор переносної швидкості \bar{v}_O , отримуємо вектор абсолютної швидкості т.М.

Для нашого випадку кут між векторами \bar{v}_{MO} та \bar{v}_O дорівнює куту φ . З трикутника векторів швидкостей визначаємо за теоремою косинусів величину вектору абсолютної швидкості \bar{v}_M :

$$v_M = \sqrt{v_{MO}^2 + v_O^2 - 2v_{MO}v_O \cos \varphi}.$$

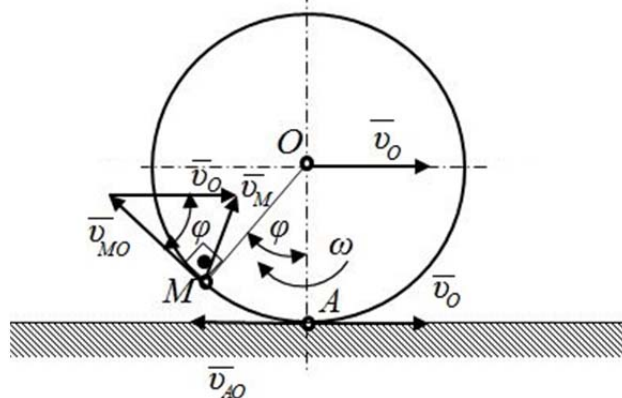


Рис.1.39.

Для визначення переносної швидкості потрібно визначити кутову швидкість обертання колеса ω . Так як колесо обертається без проковзування, то в т.А миттєва швидкість дорівнює нулю. Тобто:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{AO} + \bar{v}_O = 0.$$

Звідки модуль переносної швидкості $v_{AO} = v_O$, а так як $v_{AO} = \omega \cdot R$, то:

$$\omega = \frac{v_O}{R} = \frac{12}{0,3} = 40 \text{ рад/с}.$$

Переносна швидкість v_{MO} :

$$v_{MO} = \omega \cdot R = 40 \cdot 0,3 = 12 \text{ м/с}.$$

Абсолютна швидкість:

$$v_M = \sqrt{v_{MO}^2 + v_O^2 - 2v_{MO}v_O \cos \varphi} = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 30^\circ} = 6,2 \text{ м/с}$$

Більш простіше задача розв'язується з використанням поняття миттєвого центру швидкості. У нашому випадку миттєвий центр швидкості співпадає із точкою контакту колеса з поверхнею(рис.1.40.) т.Р.

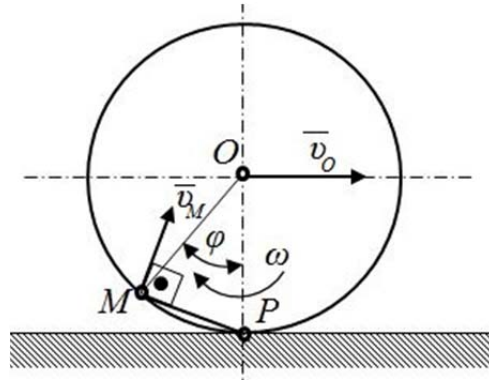


Рис.1.40.

Кутова швидкість:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{12}{0,3} = 40 \text{ рад/с.}$$

Швидкість т.М:

$$v_M = \omega \cdot MP.$$

Величина хорди MP визначається з відомого співвідношення:

$$MP = 2R \sin(\varphi / 2) = 2 \cdot 0,3 \cdot \sin 15^\circ = 0,155 \text{ м.}$$

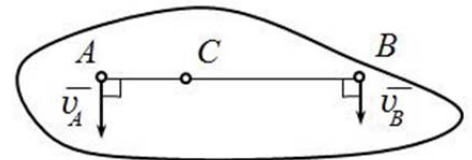
Абсолютна швидкість т.М :

$$v_M = 40 \cdot 0,155 = 6,2 \text{ м/с,}$$

вектор швидкості напрямлений перпендикулярно до хорди MP .

Питання для самоконтролю

1. Який рух тіла називають плоским?
2. Як визначити швидкість будь-якої точки тіла при поступальному русі?
3. Як визначити швидкість будь-якої точки тіла при плоскопаралельному русі?
4. Яка точка називається миттєвим центром швидкостей?
5. Яким способом можна знайти положення миттєвого центра швидкостей?
6. Як визначаються швидкості руху графоаналітичним методом?
7. Яку точку треба обирати за полюс для визначення прискорень точок плоскої фігури?
8. Точки A , B , C належать тілу, що рухається плоскопаралельно. Визначити швидкість точки C , якщо $v_A = 75 \text{ м/с}$, $v_B = 50 \text{ м/с}$, якщо $AB = 50 \text{ мм}$, $AC = 20 \text{ мм}$.



1.3. ДИНАМІКА

Динамікою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об'єктів у залежності від фізичних факторів, тобто від причин, що викликають цей рух.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло, розмірами та різницею у русі його частин можна знехтувати.

Механічною системою (системою матеріальних точок) називається сукупність матеріальних точок, які між собою взаємодіють, тобто, положення та рух яких взаємопов'язані.

У динаміці точки розглядаються дві основні задачі:

- рух точки задається, а необхідно знайти сили, які цей рух реалізують (перша або пряма задача);
- сили задаються, а необхідно визначити закон руху, який є результатом дії цих сил.

Якщо на положення матеріальної точки і на її рух не накладені ніякі обмеження, точка називається вільною. У іншому випадку маємо справу з рухом невільної точки.

В основу динаміки покладені закони Ньютона.

1. *Перший закон (закон інерції):* ізолювана від зовнішніх дій матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія інших тіл не змінить цього стану.

2. *Другий закон (основний закон динаміки):* сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює добутку маси точки на її прискорення, а напрямок сили співпадає з напрямком прискорення:

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (1.67)$$

Якщо на точку діє декілька сил, то їх можна замінити рівнодійною:

$$\vec{F} = \vec{R} = \sum \vec{F}_k . \quad (1.68)$$

Слід враховувати той факт, якщо точка рухається вздовж якоїсь поверхні, то на неї, крім активних сил діє і реакція в'язі. Сили реакції повинні бути включені до визначення рівнодійної. У загальному випадку рівняння (1.67) набуває вигляд:

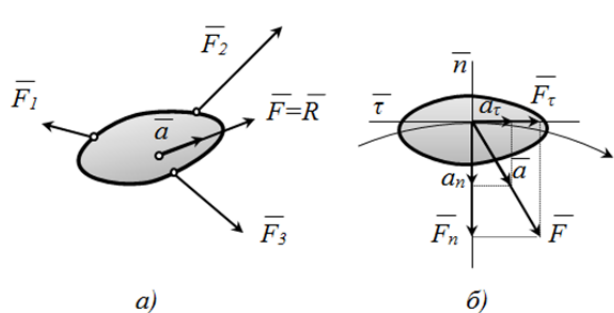
$$\sum \vec{F}_k = m\vec{a} . \quad (1.69)$$


Рис.1.41. До II закону динаміки:

а) у загальному випадку б) при русі по кривий траєкторії.

3. *Третій закон (закон рівності дії та протидії):* сили взаємодії двох матеріальних точок рівні між собою за модулем і напрямлені вздовж однієї прямої, яка з'єднує ці точки, у протилежні сторони.

1.3.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки.

Замість рівняння руху (1.69) у векторній формі можна отримати рівняння у скалярній формі, якщо спроектувати (1.69) на вісі декартової або природної систем координат.



Рівняння руху у декартових координатах:

$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = m \cdot a_x, \\ \Sigma F_{ky} = m \cdot a_y, \\ \Sigma F_{kz} = m \cdot a_z, \end{cases} \quad (1.70)$$

де, F_x, F_y, F_z – проекції сили F на відповідні декартові вісі координат;
 a_x, a_y, a_z - проекції прискорення \bar{a} на ті ж самі вісі.

Перша задача (пряма): визначити рівнодійну прикладених до точки сил якщо відома маса точки m та закони її руху, наприклад, у декартових координатах:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (1.71)$$

Спочатку треба визначити проекції прискорення точки на вісі координат:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.72)$$

Використовуючи рівняння руху точки у декартових координатах (1.70), визначають значення проекцій рівнодійної прикладених до точки сил, а також її модуль за формулою:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.73)$$

Напрямок вектора сили відносно вісей координат визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\bar{x}, \bar{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\bar{y}, \bar{F}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\bar{z}, \bar{F}) = \frac{F_z}{F}. \quad (1.74)$$

Друга задача (обернена): одержати рівняння руху точки, якщо відомі сили, які діють на матеріальну точку, її маса, а також початкові умови (положення точки та її швидкість у деякі моменти часу, не обов'язково у початковий).

Обернену задачу динаміки матеріальної точки рекомендується розв'язувати у такому порядку:

1. Зобразити матеріальну точку у поточному положенні.
2. Показати активні сили і реакції в'язей, що прикладені до матеріальної точки.
3. Обрати систему координат.
4. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
5. Записати рівняння руху у векторній формі.
6. Спроекувати рівняння руху на вісі обраної системи координат (скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки).
7. Інтегрувати систему диференціальних рівнянь руху і, скориставшись початковими умовами руху, визначити сталі інтегрування.
8. Визначити величини, які треба знайти за умовою задачі.

У випадку руху вільної матеріальної точки зручно розв'язувати задачу користуючись декартовою системою координат. При криволінійному ж русі невідомої матеріальної точки простіше розв'язувати задачу у проекціях на вісі природної системи координат. При цьому необхідно врахувати реакції в'язей.

Закон руху Ньютона не може бути справедливим у неінерціальній системі відліку (тобто у такій, що рухається нерівномірно, на відміну від інерціальної,

або абсолютної, системи відліку), оскільки при переході від однієї до іншої неінерціальної системи відліку прискорення точки змінюється, а сила, як міра взаємодії тіл, від вибору системи відліку не залежить.

У абсолютній системі відліку другий закон Ньютона має вигляд:

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}_{abc}, \text{ де } \bar{F} = \sum \bar{F}_k \quad (1.75)$$

де F_k - активні сили та реакції в'язей.

Щоб записати рівняння руху по відношенню до іншої системи відліку, яка рухається відносно абсолютної, застосуємо *теорему Коріоліса*:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{vid} + \bar{a}_{nep} + \bar{a}_{kop}, \quad (1.76)$$

тоді

$$m\bar{a}_{abc} = m\bar{a}_{vid} + m\bar{a}_{nep} + m\bar{a}_{kop}, \quad (1.77)$$

де \bar{a}_{vid} - відносне прискорення,

\bar{a}_{nep} - переносне прискорення,

\bar{a}_{kop} - коріолісове прискорення.

Для надання рівнянню руху у рухомій системі координат такої ж самої форми, як і в абсолютній, вводяться так звані переносна і коріолісова сили інерції, відповідно:

$$\bar{\Phi}_{nep} = -m\bar{a}_{nep}, \bar{\Phi}_{kop} = -m\bar{a}_{kop}, \quad (1.78)$$

тоді

$$m\bar{a}_{vid} = m\bar{a}_{abc} + (-m\bar{a}_{nep}) + (-m\bar{a}_{kop}), \quad (1.79)$$

або

$$m\bar{a}_{vid} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{nep} + \bar{\Phi}_{kop}. \quad (1.80)$$

Таким чином, для того, щоб закон руху матеріальної точки у будь-якій системі відліку мав таку ж саму форму, як і в інерціальной системі, до точки, крім рівнодійної заданих сил і реакцій в'язей, прикладають переносну і коріолісову сили інерції.

Оскільки

$$\bar{a}_{kop} = 2(\bar{\omega}_{nep} \times \bar{v}_{vid}), \quad (1.81)$$

то коріолісова сила інерції:

$$\bar{\Phi}_{kop} = -2m(\bar{\omega}_{nep} \times \bar{v}_{vid}). \quad (1.82)$$

Модуль коріолісової сили інерції дорівнює:

$$\Phi_{kop} = -2m\omega_{nep} v_{vid} \cdot \sin(\bar{\omega}_{nep} \bar{v}_{vid}). \quad (1.83)$$

Напрямок коріолісової сили інерції є зворотнім напрямку коріолісового прискорення.

Якщо переносний рух являє собою рух з обертальною складовою (плоский або сферичний), то переносне прискорення можна представити у вигляді суми нормального і дотичного прискорень точки.

У цьому випадку відносний рух матеріальної точки описується рівняннями:

$$m\bar{a}_{vid} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{n,nep} + \bar{\Phi}_{\tau,nep} + \bar{\Phi}_{kop}. \quad (1.84)$$

У випадку рівномірного обертання $\varepsilon = 0$, тобто $\Phi_{\tau,nep} = 0$.

Тоді:



$$m\bar{a}_{\text{від}} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{n,\text{пер}} + \bar{\Phi}_{\text{кор}}. \quad (1.85)$$

Якщо переносний рух є поступальним, то коріолісова сила інерції дорівнює нулю, тоді:

$$m\bar{a}_{\text{від}} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{n,\text{пер}}. \quad (1.86)$$

Якщо переносний рух рівномірний і прямолінійний, то $\Phi_{\text{кор}} = 0$, $\Phi_{\text{пер}} = 0$.

У цьому випадку рівняння відносного руху матеріальної точки має вигляд:

$$\bar{F} = m\bar{a}_{\text{від}}. \quad (1.87)$$

Рівняння (1.87) має той же вигляд, що і другий закон Ньютона, тобто відносно прискорення є у той же час і абсолютним.

Цей випадок має назву принципу відносності класичної механіки який полягає у тому, що ніяким фізичним експериментом не можна визначити, чи тіло знаходиться у спокої, чи воно рухається рівномірно та прямолінійно.

У випадку відносного спокою матеріальної точки $v_{\text{від}} = 0$ маємо:

$$a_{\text{від}} = a_{\text{кор}} = 0. \quad (1.88)$$

Тоді рівняння відносного спокою матеріальної точки має вигляд:

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_{\text{пер}} = 0. \quad (1.89)$$

Приклад розв'язання задач

У шахту починає опускатися рівноприскорене ліфт, маса якого $m = 880 \text{ кг}$. У перші 10 с він проходить 35 м . Визначити натяг T тросу, на якому висить ліфт.

Зобразимо кабінку ліфта у довільному положенні (рис.1.42). На нього діє сила тяжіння G , яка напрямлена донизу, і натяг тросу T , який діє вздовж троса вгору вертикально.

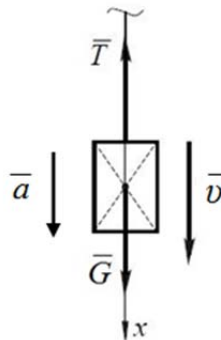


Рис.1.42.

Рух відбувається по вертикалі, тому спрямуємо вісь x вертикально донизу відповідно до напрямку швидкості та прискорення.

Складемо рівняння руху кабінки ліфта у формі другого закону Ньютона:

$$m \cdot \bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

де a - прискорення кабінки ліфта.

З урахуванням сил, що діють на кабінку ліфта, рівняння буде мати вигляд:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{G} + \bar{T}.$$

Спроекуємо це рівняння на вісь x :

$$m \cdot a = G - T ,$$

Звідки:

$$T = G - m \cdot a$$

або, так як $G=mg$, то :

$$T = m(g - a) .$$

З рівняння рівноприскореного руху: $S=S_0+v_0t+at^2/2$, визначаємо прискорення ($S_0=0, v_0=0$):

$$a = \frac{2 \cdot S}{t^2} = \frac{2 \cdot 35}{10^2} = 0,7 \text{ м/с}^2 .$$

Величина сили натягу канату;

$$T = m(g - a) = 880(9,81 - 0,7) = 8016,8 \text{ Н} .$$

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте основні закони динаміки.
2. Яке рівняння називається основним рівнянням динаміки?
3. Що є мірою інертності твердих тіл при поступальному русі?
4. Чи залежить вага тіла від його місця знаходження на Землі?
5. Яку систему відліку називають інерціальною?
6. Поясніть рівняння відносного руху матеріальної точки у неінерціальній системі.
7. Поясніть принцип відносності класичної механіки.

1.3.2. Принцип Даламбера для матеріальної точки і для твердого тіла

Розглянемо матеріальну точку M , що рухається і на яку діють задана сила \vec{F} і реакція в'язі \vec{N} (рис.1.43). Рівнодійна \vec{R} сил \vec{F} і \vec{N} зобразиться діагоналлю паралелограма і, згідно з основним законом динаміки, прискорення точки M буде співпадати за напрямком з \vec{R} , отже:

$$\vec{R} = m\vec{a} . \quad (1.90)$$

Додаємо до сил \vec{F} і \vec{N} ще одну силу, яка має такий самий модуль, що і \vec{R} , тобто $m\vec{a}$, але напрямлена протилежно \vec{a} :

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} . \quad (1.91)$$

Сила, яка за модулем дорівнює добутку маси точки на модуль її прискорення і напрямлена протилежно прискоренню, називається силою інерції.

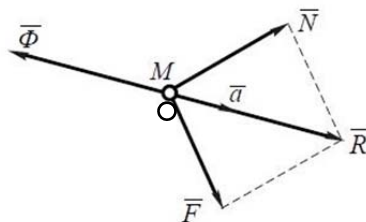


Рис.1.43.

Сума сил R і Φ дорівнює нулю, тому що вони рівні за модулем і протилежні за напрямком:

$$\vec{R} + \vec{\Phi} = 0 \text{ або } \vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0 . \quad (1.92)$$



Отже, при русі матеріальної точки у кожний даний момент часу сукупність заданої сили \bar{F} , реакції в'язі \bar{N} і сили інерції $\bar{\Phi}$ задовільняє умовам рівноваги системи збіжних сил.

У цьому сутність принципу Даламбера для матеріальної точки, значення якого полягає у тому, що при його застосуванні до задач динаміки рівняння руху записуються у формі добре відомих рівнянь рівноваги.

При проектуванні векторної рівності (1.92) на декартові вісі координат, отримуємо вирази для проекцій сили інерції на ці вісі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_x = -ma_x = -m \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \Phi_y = -ma_y = -m \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \Phi_z = -ma_z = -m \frac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right. \quad (1.93)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_\tau = -ma_\tau = -m \frac{dv}{dt}, \\ \Phi_n = -ma_n = -m \frac{v^2}{\rho}. \end{array} \right. \quad (1.94)$$

Принцип Даламбера для механічної системи. Розглянемо невільну механічну систему, яка складається з n матеріальних точок. До кожної з точок M_k цієї системи застосуємо принцип Даламбера:

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad (1.95)$$

де $k=1,2,3,\dots,n$ - поточний номер точки;

\bar{F}_k - рівнодіюча заданих сил, які прикладені до точки M_k ;

\bar{N}_k - рівнодіюча реакцій в'язей, які прикладені до цієї точки;

$\bar{\Phi}_k$ - сила інерції точки M_k .

Рівняння (1.95) показує, що у будь-який момент часу геометрична сума рівнодійна заданих сил, реакцій в'язей і сили інерції для кожної точки матеріальної невільної механічної системи дорівнює нулю. Це положення називається принципом Даламбера для невільної механічної системи.

Складемо всі n рівнянь (1.95):

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0, \quad (1.96)$$

$\sum \bar{F}_k = \bar{F}_{zl}$ - головний вектор заданих сил;

$\sum \bar{N}_k = \bar{N}_{zl}$ - головний вектор реакцій в'язей;

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}_{zl}$ - головний вектор сил інерції точок системи.

Тоді:

$$\bar{F}_{zl} + \bar{N}_{zl} + \bar{\Phi}_{zl} = 0. \quad (1.97)$$

Отже, у будь-який момент часу для будь-якої невільної механічної системи геометрична сума головних векторів заданих сил, реакцій в'язей і сил інерції матеріальних точок системи дорівнює нулю.

Приклад розв'язування задач

Автомобіль вагою $G = 10$ кН рухається вздовж опуклого мосту зі швидкістю $v = 10$ м/с, радіус кривизни моста $r = 50$ м. Визначити тиск автомобіля на міст у момент, коли він проїжджає його середину (рис.1.44).

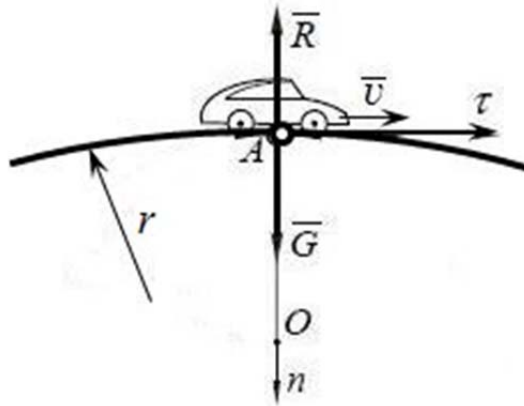


Рис.1.44.

Розв'язування. На автомобіль діють активна сила тяжіння G і реакція мосту R , яка дорівнює за величиною тиску автомобіля на міст N .

Ці сили не зрівноважують одна одну, тому що автомобіль рухається за криволінійною траєкторією з нормальним прискоренням, яке напрямлене до центру кривизни:

Якщо до сил G і R додати силу інерції Φ , яка спрямована у бік, протилежний напрямку нормального прискорення a_n , то система сил G , R і Φ буде знаходитися у рівновазі, отже:

$$\bar{G} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0.$$

Оскільки всі сили діють вздовж однієї прямої, яка співпадає з нормаллю \vec{n} , то:

$$G - \Phi - R = 0.$$

Сила інерції дорівнює за величиною:

$$\Phi = ma_n = \frac{Gv^2}{gr} = \frac{10000 \cdot 10^2}{9,81 \cdot 50} = 2040 \text{ Н} = 2,04 \text{ кН}$$

З рівняння рівноваги отримуємо:

$$R = G - \Phi = 10 - 2,04 = 7,96 \text{ кН}.$$

Тиск N автомобіля на міст дорівнює R :

$$N = R = 7,96 \text{ кН}.$$

Питання для самоконтролю

1. Як визначається за величиною і напрямом сила інерції матеріальної точки?
2. У чому сутність принципу Даламбера для матеріальної точки?
3. У чому сутність принципу Даламбера для механічної системи?
4. До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при його поступальному русі?
5. До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, яка проходить через центр мас тіла?
6. До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при плоскому русі?



1.3.3. Основний закон динаміки обертального руху

Вплив власних властивостей тіла на обертальний рух значно складніший, ніж у поступальному русі. Виявилось що маса тіла не у повній мірі характеризує інерційні властивості тіла, що обертається. Важливим є розподіл маси відносно вісі обертання, який відображається поняттям «момент інерції тіла відносно даної вісі».

Як міра інертності тіла момент інерції входить в усі формули обертального руху. Моментом інерції тіла відносно вісі z , називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до вісі:

$$I_z = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \dots + m_n h_n^2 = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2. \quad (1.98)$$

Якщо тіло суцільне, то під m_k необхідно розуміти масу елементарної частини тіла dm , тоді момент інерції буде виражатися інтегралом:

$$I_z = \int_{(M)} h^2 dm, \quad (1.99)$$

де h - відстань частки dm від вісі;

M – повна маса тіла.

Цей інтеграл береться за всією масою тіла. Очевидно, що величина моменту інерції залежить від розмірів і форми тіла, також від закону розподілу маси у тілі. Момент інерції вимірюється у системі СІ - в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Для тіл правильної геометричної форми визначення моментів інерції здійснюється за допомогою інтегрального обчислення та наведені у довідниках. Якщо тіло має неправильну форму, то момент інерції його визначається або приблизно, шляхом розбиття тіла на декілька тіл, які мають правильну геометричну форму, або експериментально.

Іноді при визначенні моменту інерції тіла користуються поняттям радіуса інерції. Радіусом інерції тіла відносно вісі, наприклад Oz , називається лінійна величина ρ_i , яка відповідає рівності:

$$I_z = M\rho_i^2, \quad (1.100)$$

де M - маса тіла.

Отже, радіус інерції визначає відстань від вісі Oz до точки, в якій необхідно зосередити всю масу M тіла, щоб момент інерції точки відносно цієї вісі дорівнював моменту інерції тіла.

Момент інерції системи відносно початку декартових координат визначається:

$$I_0 = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \quad (1.101)$$

Моменти інерції відносно координатних осей (осьові моменти) виражаються рівняннями:

$$\begin{cases} I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ I_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) \\ I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{cases} \quad (1.102)$$

Залежність між моментами інерції тіла відносно паралельних вісей, одна з яких проходить через його центр мас – теорема Гюйгенса-Штейнера.

Момент інерції тіла відносно будь-якої вісі дорівнює моменту інерції тіла відносно вісі, яка проходить через центр мас тіла паралельно до даної вісі, плюс добуток маси тіла на квадрат відстані між вісями:

$$I_0 = I_C + Md^2 \quad (1.103)$$

де I_C - момент інерції тіла відносно вісі, яка проходить через центр мас і паралельна даній;

I_0 - момент інерції тіла відносно даної вісі;

d - відстань між вісями.

З виразу (1.103) витікає, що найменшим момент інерції тіла буде відносно вісі, яка проходить через центр його мас.

Векторною мірою обертального руху є момент кількості руху.

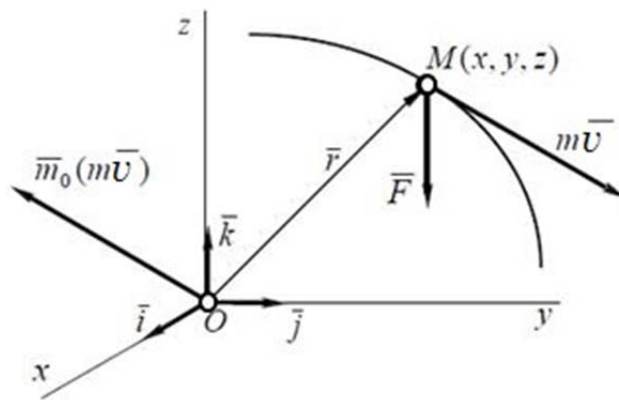


Рис.1.45.

Для матеріальної точки масою m , яка має швидкість v , момент кількості руху $\bar{m}_O(m\bar{v})$ відносно будь-якого центру O визначається із виразу (рис.1.45):

$$\bar{m}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \cdot m\bar{v} \quad (1.104)$$

Вектор моменту кількості руху прикладається у точці O відносно якої він вираховується. Якщо спроектувати обидві частини рівняння (1.104) на вісі декартової системи координат, отримуємо моменти кількості руху точки відносно вісей координат:

$$\begin{cases} m_x(m\bar{v}) = m(yv_z - zv_y), \\ m_y(m\bar{v}) = m(zv_x - xv_z), \\ m_z(m\bar{v}) = m(xv_y - yv_x). \end{cases} \quad (1.105)$$

Кінетичним моментом \bar{K}_O , або головним моментом кількості руху механічної системи відносно даного центру, називається вектор, який дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху усіх матеріальних точок системи відносно цього ж центру:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{m}_O(m_k\bar{v}_k) = \sum (\bar{r}_k \cdot m_k\bar{v}_k) \quad (1.106)$$

Подібно до того, як кількість руху системи є характеристикою поступального руху, кінетичний момент є характеристикою обертального руху системи.



Кінетичний момент твердого тіла, яке обертається відносно вісі z з кутовою швидкістю ω , дорівнює добутку кутової швидкості тіла на його момент інерції відносно вісі обертання:

$$K_z = I_z \cdot \omega. \quad (1.107)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху точки, взятого відносно будь-якого нерухомого центру O дорівнює моменту сили, яка діє на цю точку, відносно того ж центру:

$$\frac{d}{dt}[\bar{m}_O(m\bar{v})] = \bar{M}_O(\bar{F}), \quad (1.108)$$

або в проекціях по вісям координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}[\bar{m}_x(m\bar{v})] = \bar{M}_x(\bar{F}), \\ \frac{d}{dt}[\bar{m}_y(m\bar{v})] = \bar{M}_y(\bar{F}), \\ \frac{d}{dt}[\bar{m}_z(m\bar{v})] = \bar{M}_z(\bar{F}). \end{array} \right. \quad (1.109)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно деякого центру визначається теоремою про зміну кінетичного моменту: *похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно деякого центру дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх сил \bar{F}_k^e відносно того ж центру.*

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum m_O(\bar{F}_k^e). \quad (1.110)$$

Проектуючи обидві частини рівняння на нерухомі вісі системи $Oxyz$ отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{K}_x}{dt} = \sum m_x(\bar{F}_k^e), \\ \frac{d\bar{K}_y}{dt} = \sum m_y(\bar{F}_k^e), \\ \frac{d\bar{K}_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e). \end{array} \right. \quad (1.111)$$

Теорема про зміну кінетичного моменту дозволяє вивчати обертальний рух твердого тіла навколо вісі і точки, або обертальну частину руху тіла у загальному випадку руху вільного твердого тіла. Практична цінність теореми полягає ще і в тому, що вона дозволяє під час вивчення руху системи виключити з розгляду невідомі внутрішні сили.

З теореми про зміну кінетичного моменту системи (1.110), (1.111) витікають важливі висновки:

1. Якщо сума моментів відносно центру O усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кінетичний момент системи \bar{K}_O відносно тієї ж точки є сталим за величиною і напрямом, тобто:

$$\text{якщо } \sum m_O(\bar{F}_k^e) = 0, \text{ то } \frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \text{ і } \bar{K}_O = \text{const}. \quad (1.112)$$

2. Якщо сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно деякої вісі, наприклад z , дорівнює нулю, то проекція кінетичного моменту на цю ж вісь є сталою за величиною, тобто:

$$\text{якщо } \sum m_z(\bar{F}_k^e) = 0, \text{ то } \frac{dK_z}{dt} = 0 \text{ і } K_z = \text{const} . \quad (1.113)$$

При обертанні тіла відносно вісі z рівняння (1.110), після підставки виразу кінетичного моменту тіла (1.107), отримує вигляд:

$$\frac{dK_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e) . \quad (1.114)$$

Сума моментів зовнішніх сил відносно вісі обертання називається обертальним моментом і позначається:

$$\sum m_z(\bar{F}_k^e) = M_z^e . \quad (1.115)$$

Таким чином, диференціальне рівняння обертального руху тіла набуває вигляду:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \text{ або } I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e . \quad (1.116)$$

Із (1.116) слідує, що добуток моменту інерції тіла відносно вісі обертання на кутове прискорення тіла дорівнює обертальному моменту:

$$I_z \varepsilon = M_z^e . \quad (1.117)$$

Це рівняння дозволяє розв'язувати такі задачі:

- якщо задані рівняння обертання тіла $\varphi = f(t)$ і його момент інерції I_z , то можна визначити обертальний момент:

$$M_z^e = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} ; \quad (1.118)$$

- якщо задані зовнішні сили, що прикладені до тіла, початкові умови обертання φ_0 та ω_0 , момент інерції I_z тіла, то можна знайти рівняння обертання тіла $\varphi = f(t)$:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z(F_k^e); \quad (1.119)$$

- визначити момент інерції тіла I_z відносно вісі обертання, якщо відомі величини M_z і ε :

$$I_z = \frac{M_z^e}{\varepsilon} . \quad (1.120)$$

З аналізу рівняння $I_z \varepsilon = M_z^e$ отримуємо такі окремі випадки:

1. Якщо $M_z = 0$, то $I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e = 0$, а якщо $I_z = \text{const}$, то $\varepsilon = 0$, $\omega = \text{const}$. У цьому випадку тіло обертається рівномірно.

2. Якщо $M_z = \text{const} \neq 0$, то $I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e = \text{const}$, а при $I_z = \text{const}$, то і $\varepsilon = \text{const}$.

Отже, тверде тіло обертається рівнозмірно.

Задачі, які відносяться до цієї теми, можна розділити на наступні чотири основні типи:

1. Обчислення кінетичного моменту.



2. Вивчення руху конкретної точки механічної системи, якщо ця точка бере участь в обертальному русі системи.

3. Вивчення обертального руху твердого тіла.

4. Вивчення руху механічної системи, до якої входять тіла, які здійснюють як поступальні, так і обертальні рухи.

Задачі першого типу можуть бути розв'язані за допомогою загальних формул (1.106), (1.107).

Порядок розв'язування задач другого типу може бути наступним:

1. Вибрати систему координат.

2. Зобразити усі зовнішні сили, які прикладені до матеріальної точки.

У випадку невільної точки до цих сил додати реакції зовнішніх в'язей.

3. Записати у скалярній формі вираз теореми про зміну моменту кількості руху точки.

4. Обчислити суму моментів сил, які прикладені до матеріальної точки.

5. Визначити кількість руху матеріальної точки і її момент відносно вісей.

6. Підставити дані пунктів 4 і 5 у рівняння (1.110) теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної точки.

7. Вирішити, відповідно до умови, пряму або обернену задачу динаміки точки.

При розв'язуванні задач третього типу потрібно виконати рекомендації перших двох пунктів, а далі робити таким чином:

1. Записати диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої вісі $I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e)$.

2. Визначити момент інерції твердого тіла відносно нерухомої вісі.

3. Обчислити суму моментів усіх зовнішніх сил відносно вісі обертання.

4. Величини, отримані в п.п. 4 і 5, підставити у рівняння (1.116).

5. Записати початкові умови.

6. Розв'язати рівняння п.6 в залежності від умови (пряма чи обернена задача).

При розв'язанні задач четвертого типу необхідно попередньо розділити задану систему на окремі тверді тіла і до кожного з них, в залежності від характеру руху, застосувати одну з теорем: про зміну кількості руху – у випадку поступального руху тіл розділеної системи; про зміну кінетичного моменту – при наявності тіл, які здійснюють обертальні рухи.

Приклад розв'язування задач

Для визначення моменту тертя у цапфах, на вал насаджено маховик вагою $G = 500H$, радіус інерції маховика $\rho = 1,5$ м. Маховику надано кутову швидкість, яка відповідає $n = 240$ об/хв. Без зовнішньої дії на нього, він зупиниться через $t = 10$ хв. Визначити момент тертя $M_{тр}$, вважаючи його сталим.

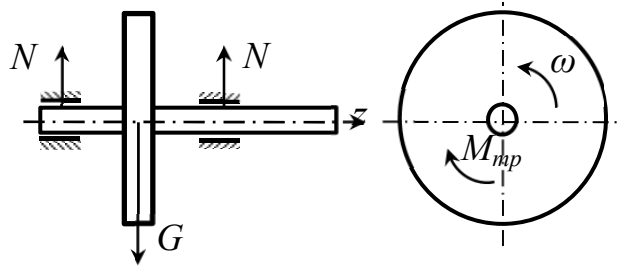


Рис.1.46.

Направимо вісь z вздовж нерухомої вісі обертання. Зобразимо (рис.1.46) зовнішні навантаження, які діють на вал і маховик: силу тяжіння маховика G , реакції опор N_1 і N_2 та момент сил тертя M_{mp} .

Оскільки ми розглядаємо обертання твердого тіла, то:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(F_k^e) \text{ або } I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e.$$

Знайдемо обертальний момент зовнішніх сил відносно вісі обертання z . Момент сил G , N_1 та N_2 відносно вісі z дорівнюють нулю, оскільки ці сили перетинають вісь. Отже, обертальний момент дорівнює моменту сил тертя і напрямлений у бік, протилежний обертанню маховика.

Таким чином:

$$I_z \varepsilon = -M_{mp}.$$

Момент інерції маховика визначається:

$$I_z = m \cdot \rho^2 = \frac{G}{g} \cdot \rho^2 = \frac{500}{9,8} \cdot 1,5^2 = 114,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

ω_0 , ω – початкова та кінцева кутові швидкості маховика.

Так як $\omega_0 = 0$, та, врахувавши переведення кутової швидкості з об/хв. в рад/с, отримуємо:

$$\varepsilon = -\frac{\pi \cdot n}{30 \cdot t} = -\frac{3,14 \cdot 240}{30 \cdot 600} = -0,042 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Момент тертя:

$$M_{mp} = I_z \varepsilon = 114,8 \cdot 0,042 = 4,8 \text{ Нм}$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається моментом інерції твердого тіла відносно вісі?
2. Яку величину називають радіусом інерції?
3. Яка залежність між моментами інерції тіла відносно паралельних вісей?
4. Відносно якої вісі момент інерції тіла має найменше значення?
5. Що називається кінетичним моментом відносно центру або вісі?
6. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту відносно центру і відносно вісі.



1.3.4. Динаміка системи матеріальних точок

Сили, які діють на механічну систему, поділяють на зовнішні і внутрішні. Сили, які діють на точки даної механічної системи з боку точок або тіл, що не входять до цієї системи, називаються зовнішніми, а сили, які діють на точки механічної системи з боку точок даної системи, називаються внутрішніми. Зовнішні сили позначаються верхнім індексом “e”, внутрішні – “i”: F^e - зовнішня сила, F^i - внутрішня сила.

Внутрішні сили мають такі властивості:

а) геометрична сума (головний вектор) внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum \bar{F}_k^i = 0; \quad (1.121)$$

б) геометрична сума моментів (головний момент) усіх внутрішніх сил відносно будь-якого центру O або вісі дорівнює нулю:

$$\sum m_0(\bar{F}_k^i) = 0. \quad (1.122)$$

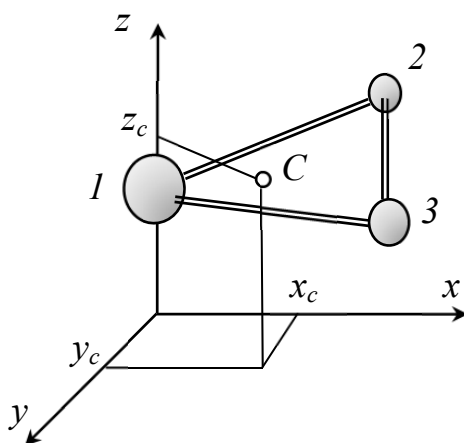


Рис. 1.47. До поняття про центр мас системи тіл 1,2,3.

У системи тіл виділяють окрему точку – центр мас. Координати центру мас механічної системи, які визначаються:

$$x_c = \frac{1}{M} \sum m_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{M} \sum m_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{M} \sum m_k z_k. \quad (1.123)$$

Теорема про рух центру мас механічної системи формулюється наступним чином: *добуток маси системи на прискорення її центру мас дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на систему.*

$$M \cdot \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e, \quad (1.124)$$

де M - маса системи;

\bar{a}_C - прискорення центру мас;

$\sum \bar{F}_k^e$ - сума зовнішніх сил, які діють на систему.

З порівняння наведеної вище формули з другим законом динаміки для матеріальної точки (1.67) можна зробити такий висновок: *центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, у якій зосереджено масу всієї системи і до якої прикладені ті ж самі зовнішні сили, що діють на систему.*

Теорема про рух центру мас системи у проекціях на вісі декартової системи координат має вигляд:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{kx}^e, \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{ky}^e, \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{kz}^e. \end{cases} \quad (1.125)$$

де x_C , y_C , z_C - координати центру мас механічної системи, які визначаються:

$$x_C = \frac{1}{M} \sum m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum m_k z_k, \quad (1.126)$$

x_{zk} , y_{zk} , z_{zk} - координати k -ої матеріальної точки.

З наведених рівнянь слідує, що внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центру мас. Теорема дозволяє виключити з розгляду всі попередньо невідомі внутрішні сили.

Задачі динаміки поступального руху твердого тіла розв'язуються за допомогою теореми про рух центру мас системи матеріальних точок.

Дійсно, застосувавши цю теорему, ми визначимо рівняння траєкторії, швидкість і прискорення центру ваги твердого тіла. При поступальному русі твердого тіла траєкторії усіх його точок однакові, однакові і їх швидкості та прискорення.

Закон збереження руху центру мас. З теореми про рух центру мас витікає декілька наслідків:

1. Якщо геометрична сума усіх зовнішніх сил, які діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас механічної системи знаходиться у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно.

$$M a_C = \sum F_k^e = 0, \text{ звідки } a_C = 0.$$

2. Якщо геометрична сума зовнішніх сил, які діють на систему, не дорівнює нулю, але сума їх проекцій на деяку вісь (наприклад, вісь x) дорівнює нулю, то центр мас системи вздовж цієї вісі або не рухається, або рухається рівномірно.

$$\sum F_{kx}^e = 0, \text{ то } M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0 \text{ або } M \frac{dv_{Cx}}{dt} = 0, \text{ звідки } v_{Cx} = \text{const.}$$

Якщо при цьому дорівнює нулю початкова швидкість, тобто $v_{Cx} = 0$, то $x_C = \text{const}$. Бачимо, що у цьому випадку координата центру мас x_C механічної системи під час її руху залишається незмінною.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему про рух центру мас системи.
2. Який рух твердого тіла можна розглядати як рух матеріальної точки, яка має масу даного тіла, і чому?



3. За яких умов центр мас знаходиться у стані спокою, рухається рівномірно і прямолінійно ?

4. За яких умов центр мас системи не переміщується вздовж будь-якої вісі ?

1.3.5. Рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла

З кінематики відомо, що для визначення положення твердого тіла, яке здійснює плоский рух, достатньо задати положення будь-якої його точки, яка приймається за полюс, і кут повороту навколо миттєвої вісі обертання, яка проходить через полюс перпендикулярно площині руху.

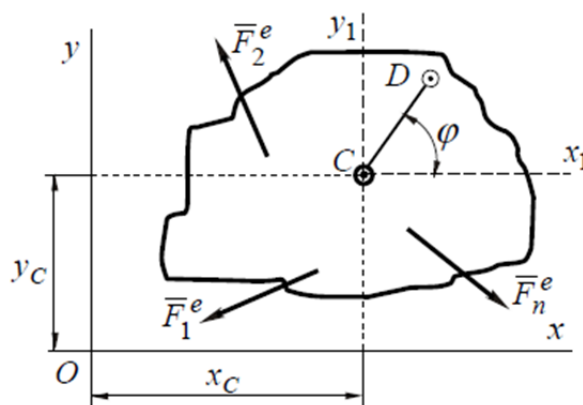


Рис. 1.48.

Задачі розв'язуються простіше, якщо за полюс вибрати центр мас C тіла (рис. 1.48) і визначати положення тіла координатами x_c , y_c та кутом φ . Таким чином, для вивчення плоского руху твердого тіла достатньо скласти три диференціальні рівняння, які пов'язують величини x_c , y_c , φ із зовнішніми силами, що діють на тіло.

Для визначення руху центру мас використовується теорема про рух центру мас системи:

$$M \cdot \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e \quad (1.126)$$

\bar{R}^e - головний вектор всіх зовнішніх сил, які діють на тіло;

\bar{a}_C - прискорення центру мас.

Рівняння, яке визначає обертальний рух тіла, отримується з теореми про зміну моменту кількості руху відносно вісі, яка проходить через точку C :

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \sum m_C(\bar{F}_k^e), \quad (1.127)$$

де \bar{K}_C - момент кількості руху тіла відносно вісі, яка проходить через центр мас;

$\sum m_C(\bar{F}_k^e)$ - головний момент зовнішніх сил, які прикладені до тіла.

Проектуючи рівняння (1.127) на нерухомі вісі координат системи Oxy , а також враховуючи, що для твердого тіла $K_C = I_C \omega$ (I_C - момент інерції тіла відносно вісі, яка проходить через точку C), отримуємо наступні диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\bar{a}_{Cx} = \sum \bar{F}_{kx}^e; \\ M\bar{a}_{Cy} = \sum \bar{F}_{ky}^e; \\ I_C \varepsilon = \sum m_C (\bar{F}_k^e). \end{array} \right. \quad (1.128)$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{kx}^e; \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{ky}^e; \\ I_C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_C (\bar{F}_k^e). \end{array} \right. \quad (1.129)$$

Питання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називається плоским?
2. Який вигляд мають кінематичні рівняння плоского руху твердого тіла?
3. Який вигляд мають диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла?
4. Які загальні теореми динаміки механічної системи використовуються для складання цих рівнянь?
5. Яким видом диференціальних рівнянь плоского руху твердого тіла зручно користуватися, якщо задана траєкторія центру мас тіла?

1.3.6. Закон збереження кількості руху системи

Для характеристики дії сили за деякий проміжок часу введено поняття імпульсу сили.

Якщо сила F стала, то імпульс сили S дорівнює:

$$\bar{S} = \bar{F} \cdot t. \quad (1.130)$$

Напрямок імпульсу сили \bar{S} співпадає з напрямком \bar{F} . Одиниця вимірювання імпульсу у системі СІ - кг·м/с.

Якщо сила F змінна, то імпульс сили за скінчений проміжок часу t визначається як інтеграл:

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (1.131)$$

Імпульс сили – це складна фізична величина, яка одночасно враховує вплив модуля, напрямку і часу дії сили на зміну стану руху тіла.

Модуль імпульсу сили можна визначити через його проекції на вісі координат:

$$\bar{S}_x = \int_0^t \bar{F}_x dt, \quad \bar{S}_y = \int_0^t \bar{F}_y dt, \quad \bar{S}_z = \int_0^t \bar{F}_z dt. \quad (1.132)$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}, \quad (1.133)$$



де F_x, F_y, F_z - проекції сили;

S_x, S_y, S_z - проекції імпульсу на вісі координат.

Кути між вектором \vec{S} та вісями координат визначаються з таких співвідношень:

$$\cos(\vec{S}, \hat{i}) = \frac{S_x}{S}, \cos(\vec{S}, \hat{j}) = \frac{S_y}{S}, \cos(\vec{S}, \hat{k}) = \frac{S_z}{S}. \quad (1.134)$$

Однією з мір руху матеріальної точки є кількість її руху. *Кількістю руху точки називається вектор \vec{q} , який дорівнює добутку маси m точки на її швидкість \vec{v} та напрямлений за вектором швидкості:*

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (1.135)$$

Поняття кількості руху було введено в механіку Декартом і покладене в основу механіки Ньютона. Одиниця вимірювання кількості руху у системі СІ - кг·м/с.

Якщо спроектувати вектор кількості руху на вісі координат, то її проекції визначаються таким чином:

$$q_x = mv_x, q_y = mv_y, q_z = mv_z. \quad (1.136)$$

Теорема про зміну кількості руху точки у диференціальній формі має вигляд:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k = \vec{R}. \quad (1.137)$$

Похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі усіх сил, які діють на цю точку.

Теорема про зміну кількості руху точки в інтегральній формі:

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \int_0^{t_1} \vec{F}_k dt = \sum \vec{S}_k. \quad (1.138)$$

Зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх сил, які прикладені до точки.

Векторному рівнянню (1.138) відповідають три рівняння у проекціях на вісі координат:

$$\begin{cases} mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}; \\ mv_{1y} - mv_{0y} = \sum S_{ky}; \\ mv_{1z} - mv_{0z} = \sum S_{kz}. \end{cases} \quad (1.139)$$

Більшість практичних задач розв'язується з використанням виразу (1.138). Порядок розв'язання задач на застосування теореми про зміну кількості руху точки і механічної системи.

Для матеріальної точки:

1. Зобразити на рисунку усі сили, які прикладені до матеріальної точки, тобто активні сили і реакції в'язей.
2. Вибрати систему координат.
3. Записати теорему про зміну кількості руху точки у векторній формі.
4. Спроектувати це векторне рівняння на вісі обраної системи координат.

5. Розв'язати отримані рівняння і визначити шукані величини.

Для механічної системи:

1. Зобразити на рисунку усі зовнішні сили.
2. Вибрати систему координат.
3. Записати теорему про зміну кількості руху системи у векторній формі.
4. Спроекувати це векторне рівняння на вісі обраної системи координат.
5. Розв'язати отримані рівняння і визначити шукані величини.

Приклад розв'язування задач

Залізничний потяг рухається по горизонтальній і прямолінійній ділянці колії. Під час гальмування до повної зупинки розвивається сила опору, яка дорівнює $R = 0,1$ ваги потягу. У момент початку гальмування швидкість потягу v_0 становила 72 км/год . Визначити час t і шлях L гальмування.

Зобразимо сили, які діють на потяг під час гальмування (рис.1.49): сила тяжіння потягу – G , нормальна реакція колії – N , сила опору – R , яка за величиною дорівнює $R = 0,1G$.

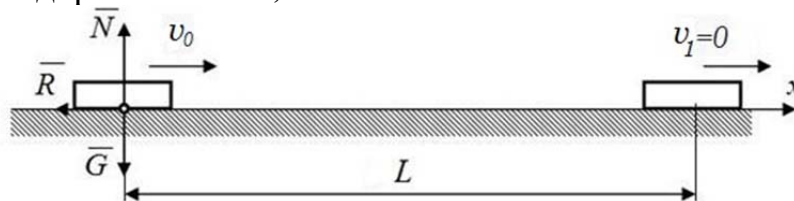


Рис.1.49.

Виберемо систему координат. Оскільки рух прямолінійний і горизонтальний, досить розглянути рух у напрямку вісі x .

Напишемо вираз теореми про зміну кількості руху в інтегральній формі для потягу (розглядаючи його як матеріальну точку):

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k = \bar{S}_G + \bar{S}_R + \bar{S}_N,$$

де m - маса потягу;

\bar{v}_1, \bar{v}_0 - кінцева і початкова швидкість потягу;

$\sum \bar{S}_k$ - сума імпульсів сил G, R, N , які діють на потяг під час гальмування.

Спроекуємо векторне рівняння на вісь x :

$$mv_1 - mv_0 = -S_R.$$

Проекції імпульсів сил \bar{S}_G і \bar{S}_N на вісь x дорівнюють нулю, оскільки вони перпендикулярні до осі.

Сила опору R під час гальмування за величиною не змінюється, отже, її імпульс дорівнює:

$$S_R = R \cdot t = 0,1 \cdot G \cdot t.$$

Швидкість у кінці ділянки гальмування дорівнює нулю, тобто $v_1 = 0$. Остаточо, рівняння імпульсів у проекції на вісь x набуде вигляду:

$$-mv_0 = -S_R = -0,1 \cdot G \cdot t,$$



або

$$mv_0 = 0,1 \cdot m \cdot g \cdot t,$$

Звідки:

$$t = \frac{v_0}{0,1 \cdot g} = \left| v_0 = \frac{72}{3,6} = 20 \text{ м/с} \right| = \frac{20}{0,1 \cdot 9,81} = 20,4 \text{ с}.$$

Шлях гальмування визначається за формулою рівноприскореного руху:

$$S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Прискорення розраховується за формулою:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t} = \frac{0 - 20}{20,4} = -0,98 \text{ м/с}^2.$$

Тоді

$$S = 20 \cdot 20,4 + \frac{-0,98 \cdot 20,4^2}{2} = 204 \text{ м}$$

Питання для самоконтролю

1. Як визначається імпульс змінної сили за кінцевий проміжок часу?
2. Чому дорівнює імпульс рівнодійної сили?
3. Що називається кількістю руху системи?
4. Сформулюйте теореми про зміну кількості руху точки і системи у диференціальній формі.
5. Сформулюйте теореми про зміну кількості руху точки і системи в інтегральній формі.

1.3.7. Робота сил

Процес зміни енергії тіла під дією сили називається процесом виконання роботи. Зміна енергії тіла в цьому процесі називається роботою. В механіці сила, прикладена до тіла, виконує роботу лише тоді, коли тіло при цьому переміщується.

При прямолінійному поступальному русі робота, яку виконує постійна сила, залежить від величини сили і шляху переміщення. Кількість роботи сили визначається:

$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha = F_\tau \cdot S, \quad (1.140)$$

де F_τ - проекція сили на напрям переміщення (рис.1.50).

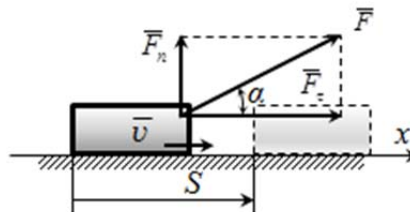


Рис. 1.50.

Одиницею вимірювання роботи у системі СІ є Джоуль ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ Нм} = 1 \text{ кгм/с}^2$). При непрямолінійному русі довільну траєкторію довжиною S розіб'ємо на нескінченне число малих прямолінійних ділянок dS із своїми напрямками $d\vec{S}$ (рис. 1.50).

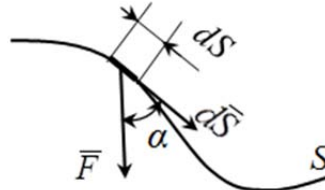


Рис. 1.51.

Елементарна робота δA , що виконується силою F при малому переміщенні dS , рівна (рис.1.51):

$$\delta A = F \cdot dS \cdot \cos \alpha = F_{\tau} \cdot dS. \quad (1.141)$$

Робота, що виконується на скінченному шляху від S_1 до S_2 силою F , рівна сумі елементарних робіт на окремих малих ділянках шляху і визначається за формулою:

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F \cdot \cos \alpha \cdot dS = \int_{S_1}^{S_2} F_{\tau} dS, \quad (1.142)$$

де F_{τ} є функцією від S .

У проекціях за вісями рівняння 1.142 набуває вигляду:

$$A = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (1.143)$$

Робота постійної сили визначається:

$$A = F \int_{S_1}^{S_2} \cos \alpha \cdot dS. \quad (1.144)$$

З цього рівняння бачимо, що сила, яка діє на тіло, не виконує роботи, якщо:

1) тіло перебуває у спокої, тобто величина шляху dS , пройденого тілом, рівна нулю;

2) коли $\vec{F} \perp d\vec{S}$, тобто $\alpha=90^\circ$ та $\cos \alpha=0$. У цьому випадку сила лише викривлює траєкторію рухомого тіла. Така сила називається доцентровою.

Зауваження:

1) Якщо $\alpha < 90^\circ$, то робота сили додатня і напрям вектора \vec{F}_{τ} збігається з напрямом \vec{v} . У такому випадку силу \vec{F} називають рушійною силою.

2) Якщо $\alpha > 90^\circ$, то робота сили від'ємна, бо $\cos(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ і напрям сили \vec{F}_{τ} протилежний до \vec{v} . У такому випадку силу \vec{F} називають силою опору.

3) Якщо на рухоме тіло діють одночасно кілька сил, то робота рівнодійної цих сил рівна алгебраїчній сумі робіт окремих сил.

Сила, що діє на тіло, яке рухається поступально, називається консервативною (потенціальною), якщо робота, що виконується даною силою при переміщенні тіла, не залежить від того, вздовж якої траєкторії відбулось це переміщення.

Нехай маємо замкнений контур, вздовж якого рухається матеріальна точка під дією сили \vec{F} (рис. 1.52).

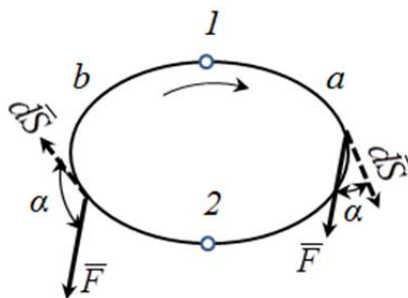


Рис. 1.52.

Відповідно до означення для консервативної сили:

$$|A_{1a2}| = |A_{2b1}| = A. \quad (1.146)$$

На ділянці $1a2$ у кожній точці траєкторії кут α між \vec{F} і $d\vec{S}$ гострий, тому

$$A_{1a2} = \int_{1a}^2 F \cdot \cos \alpha \cdot dS = +A. \quad (1.147)$$

На ділянці $2b1$ у кожній відповідній точці траєкторії кут α є тупим, тому

$$A_{2b1} = \int_{2b}^1 F \cdot \cos \alpha \cdot dS = -A. \quad (1.149)$$

На основі вищевикладеного видно, що при переміщенні тіла вздовж замкненої траєкторії, робота консервативних сил рівна нулю (прикладом консервативних сил є сили гравітаційного притягання):

$$\oint_{1,2,1} F \cdot \cos \alpha \cdot dS = A_{1a2} + A_{2b1} = A - A = 0 \quad (1.150)$$

Усі сили, що не задовольняють даній умові, називаються неконсервативними (прикладом неконсервативних сил є сила тертя, яка завжди напрямлена протилежно до $d\vec{S}$). Робота такої сили завжди від'ємна, а на замкненій траєкторії вона не дорівнює нулю:

$$\oint_{1,2,1} F \cdot \cos \alpha \cdot dS \neq 0. \quad (1.151)$$

Робота сили тяжіння дорівнює взятому зі знаком плюс або мінус добутку сили тяжіння на вертикальне переміщення точки її прикладання:

$$A = \pm G \cdot h, \quad (1.152)$$

де G – сила тяжіння;

h – вертикальне переміщення точки прикладання сили.

З цієї формули випливає, що робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії між початковою і кінцевою точками руху, а залежить лише від відстані між горизонтальними площинами, які проходять через початкове та кінцеве положення точки. Якщо початкова точка розташована вище кінцевої, то робота сили тяжіння додатня, у іншому випадку – від'ємна.

Робота сили пружності дорівнює половині добутку коефіцієнту жорсткості пружини на різницю квадратів початкового та кінцевого видовжень (або стискань) пружини:

$$A = \frac{c}{2} (\Delta \ell_{\text{поч}}^2 - \Delta \ell_{\text{кін}}^2). \quad (1.153)$$

Робота сили пружності від'ємна у тому випадку, коли деформація збільшується, тобто коли $|\Delta l_{\text{нов}}| < |\Delta l_{\text{кин}}|$. Це відповідає переміщенню кінця пружини від положення рівноваги. Якщо $|\Delta l_{\text{нов}}| > |\Delta l_{\text{кин}}|$, робота буде додатня. У цьому випадку кінець пружини переміщується до положення рівноваги.

Елементарна робота сили, прикладеної до будь-якої точки тіла, яке обертається навколо нерухомої вісі, наприклад z , дорівнює добутку моменту сили відносно вісі обертання на диференціал кута повороту:

$$\delta A = M_z d\varphi. \quad (1.154)$$

Для того, щоб визначити роботу сили, яка діє на тіло при його повороті на кут від φ_1 до φ_2 , необхідно проінтегрувати рівняння у цих межах, виразивши момент сили як функцію кута повороту:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \quad (1.155)$$

У окремому випадку, коли момент сили є сталим, тобто $M_z = \text{const.}$, робота дорівнює добутку моменту сили на кут повороту тіла:

$$A = M_z (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.156)$$

Для характеристики швидкості виконання роботи вводять фізичну величину – потужність.

Потужністю сили називають фізичну величину, що чисельно рівна роботі, яка виконується даною силою за одиницю часу:

$$N = \frac{\delta A}{dt}, \quad (1.157)$$

або для постійної сили:

$$N = \frac{A}{t}. \quad (1.158)$$

Враховуючи (1.141), формулу для потужності напишемо:

$$N = F \cos \alpha \frac{dS}{dt} = F_\tau \frac{dS}{dt}, \quad (1.159)$$

або

$$N = F_\tau \cdot v, \quad (1.160)$$

де - v швидкість руху тіла, на яке діє сила F .

Якщо сила непостійна, то непостійна і потужність, тоді користуються середньою потужністю за час t :

$$N_{cp} = \frac{A}{t}. \quad (1.161)$$

При обертальному русі тіла:

$$dA = M_z \cdot d\varphi. \quad (1.162)$$

Тоді

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (1.163)$$

Потужність виражається добутком обертального моменту на кутову швидкість.



Одиницею вимірювання потужності у системі СІ є Ват ($1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$), у системі МкГС – 1 кГсм/с .

При визначенні роботи необхідно розрізняти наступні випадки:

1. Прямолінійний рух під дією сталої сили. У цьому випадку застосовується формула (1.140).

2. Прямолінійний рух під дією сили, яка є функцією відстані. У цьому випадку використовують формулу (1.142), яка, якщо спрямувати вісь x за траєкторією точки, приймає вигляд:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot \cos \alpha \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \quad (1.164)$$

3. Криволінійний рух під дією сталої за модулем і напрямом сили. У цьому випадку можна використати формулу (1.144).

4. Криволінійний рух під дією сили, що визначається функцією координат точки прикладення сили. У цьому випадку визначення роботи зводиться до обчислення криволінійного інтегралу за формулою (1.142).

5. Обертальний рух твердого тіла під дією сталого моменту або моменту, який є функцією кута повороту тіла. У цьому випадку для обчислення роботи використовуються формули (1.155) або (1.156).

Для обчислення потужності, якщо має місце прямолінійний або криволінійний рух точки користуються формулами (1.158, 1.160), а у випадку обертального руху твердого тіла формулою (1.163).

У всіх цих випадках перед обчисленням роботи або потужності необхідно зобразити усі зовнішні сили, які прикладені до тіла або механічної системи, що розглядається.

Кожна машина при виконанні роботи частину роботи витрачає на подолання різних непродуктивних опорів, в першу чергу – сил тертя, втрат енергії з теплом, незворотність процесів, тощо. Таким чином, для виконання корисної роботи потрібні витрати більшої роботи. Відношення корисної роботи, що виконала машина (механізм), до затраченої отримала назву коефіцієнт корисної дії (ККД). Він характеризує ступінь досконалості машини і визначається за формулою:

$$\eta = \frac{\delta A_{\text{кор}}}{\delta A_{\text{вит}}} = \frac{N_{\text{кор}}}{N_{\text{вит}}}, \quad (1.165)$$

де $\delta A_{\text{кор}}$, $\delta A_{\text{вит}}$ – відповідно корисна та витрачена робота;

$N_{\text{кор}}$, $N_{\text{вит}}$ - відповідно корисна та витрачена потужність.

З рівняння (1.165) слідує, що у загальному випадку ККД може змінюватися в залежності від навантаження машини.

Середній ККД визначається:

$$\eta = \frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{вит}}}, \quad (1.166)$$

де $A_{\text{кор}}$, $A_{\text{вит}}$ – відповідно корисна та витрачена робота за певний час роботи.

Для технічних пристроїв ККД може мати різні значення, так для електродвигунів ККД складає порядку 0,96, для двигунів автомобілів – 0,3...0,4, для водяного колеса – 0,01.

Корисну роботу можливо визначити за допомогою рівнянь (1.140, 1.152, 1.153, 1.156). Потрібну роботу або потужність для приводу машини визначають:

$$A_{\text{вир}} = \frac{A_{\text{кор}}}{\eta}, N_{\text{вир}} = \frac{N_{\text{кор}}}{\eta}. \quad (1.167)$$

Приклад розв'язування задач

Визначити ККД ліфтової установки та потужність двигуна, якщо при підйому на 20 м витрати електроенергії на привод склали 0,2 кВт·год. Маса ліфта з вантажем складає 2000 кг, швидкість підйому вважати сталою $v=0,5$ м/с.

Корисна робота визначається таким чином:

$$A_k = G \cdot h = m \cdot g \cdot h = 2000 \cdot 9,8 \cdot 20 = 392000 \text{ Дж або } 392 \text{ кДж.}$$

Витрачена робота (спожита електроенергія):

$$A_e = 3600 \cdot \Delta A_e,$$

де ΔA_e – витрати електроенергії в кВт·год,

тоді

$$A_e = 3600 \cdot 0,2 = 720 \text{ кДж.}$$

ККД установки:

$$\eta = \frac{A_k}{A_e} = \frac{392}{720} = 0,54.$$

Час підйому:

$$t = \frac{h}{v} = \frac{20}{0,5} = 40 \text{ с.}$$

Середня потужність двигуна:

$$N_{\text{cp}} = \frac{A_e}{t} = \frac{720}{40} = 18 \text{ кВт.}$$

Питання для самоконтролю

1. Як визначається робота сталої за модулем і напрямом сили на прямолінійному переміщенні точки прикладення сили?
2. Як визначається елементарна робота сили через проекції сили на вісі координат?
3. У яких випадках робота сили додатна, від'ємна, дорівнює нулю?
4. Які сили вважають консервативними?
5. Чому дорівнює робота консервативної сили на замкнутому контурі?
6. Як вираховується робота сил тяжіння і пружності?
7. Як пов'язані потужність та робота сили?
8. Поясніть формули визначення роботи сили та потужності при обертovому русі.



1.3.8. Закон збереження механічної енергії

У механіці розглядають лише два види енергії: кінетичну (енергію рухомого тіла) і потенціальну (енергію взаємного розміщення тіл).

Розглянемо визначення кінетичної енергії.

За II законом Ньютона сила визначається:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{або} \quad \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.168)$$

Помножимо останню рівність скалярно на $d\vec{S} = \vec{v} dt$.

Отримуємо:

$$\vec{F} d\vec{S} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt \quad (1.169)$$

Після спрощення рівняння набуває вигляду:

$$\vec{F} d\vec{S} = m \vec{v} d\vec{v} \quad (1.170)$$

Ліва частина це елементарна роботи сили матеріальної точки на шляху dS , а права після перетворення, при умові постійності маси, набуває вигляду $d(\frac{mv^2}{2})$, тоді рівняння (1.170) перетворюється у таке:

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (1.171)$$

При переміщенні матеріальної точки вздовж траєкторії між точками 1-2:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1.172)$$

Величина $\frac{mv^2}{2}$ - це кількість кінетичної енергії матеріальної точки у певний фіксований момент:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.173)$$

Тоді формулу для роботи можна представити як різницю кінетичних енергій матеріальної точки у положенні 2 і 1:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{k2} - W_{k1}. \quad (1.174)$$

Отже, *робота сили при переміщенні матеріальної точки дорівнює зміні кінетичної енергії цієї матеріальної точки.*

Кінетична енергія масивного тіла з моментом інерції I , яке обертається з кутовою швидкістю ω , визначається за формулою:

$$W_{k.об} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}, \quad (1.175)$$

де $L=I\omega$ — момент кількості руху (або момент імпульсу) тіла.

Повну кінетичну енергію тіла, котре рухається одночасно поступально та обертається, розраховується за формулою:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.176)$$

Розглянемо зв'язок кінетичної енергії з імпульсом матеріальної точки. Для цього зробимо наступні перетворення у формулі визначення кінетичної енергії:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m} = \frac{m^2 v^2}{2m}, \quad (1.177)$$

величина $mv=q$ є імпульсом матеріальної точки, тоді:

$$W_k = \frac{q^2}{2m}, \text{ або } q = \sqrt{2mW_k}. \quad (1.178)$$

Кінетичною енергією механічної системи називається сума кінетичних енергій матеріальних точок, з яких складається система. Робота усіх сил, що діють на систему матеріальних точок, дорівнює зміні кінетичної енергії цієї системи. Зауважимо, що зміна кінетичної енергії системи тіл визначається не лише роботою зовнішніх, але і внутрішніх сил.

Проілюструємо цей висновок. Нехай система складається з двох точок. Наприклад, внаслідок дії сил електричного притягання виникне рух точок одна до одної. Кожна з сил, що діє на іншу точку, виконає роботу:

$$\delta A_1 = F_1 \cdot dS_1, \quad (1.179)$$

$$\delta A_2 = F_2 \cdot dS_2. \quad (1.180)$$

Сумарна робота визначиться:

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2. \quad (1.181)$$

Ця робота піде на приріст кінетичної енергії всієї системи. Тобто кінетична енергія системи змінилась за рахунок дії внутрішніх сил.

Якщо матеріальна точка у кожній точці простору зазнає дії певних тіл, то вважають, що вона знаходиться у силовому полі. Силкові поля можуть мати різний характер. Якщо величина сили, що діє на матеріальну точку з боку поля, не залежить від місця перебування точки у просторі, то таке поле називається однорідне (електричне поле між обкладинками конденсатора).

Якщо ж величина сили, що діє з боку поля на матеріальну точку, залежить від віддалі до центру поля, то таке поле називають центральним (гравітаційне поле).

Якщо силове поле описується функцією $\Pi(x,y,z,t)$ такою, що частинні похідні по координатах від неї дають значення проекцій сили на відповідні вісі, називається потенціальним (це означення потенціального поля з математичної точки зору). Тобто:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta x} = F_x, \quad \frac{\delta \Pi}{\delta y} = F_y, \quad \frac{\delta \Pi}{\delta z} = F_z, \quad (1.182)$$

де Π – потенціальна функція.

Якщо потенціальна функція не залежить від часу (тобто $\Pi(x,y,z)$), то поле називається стаціонарним. Робота, виконана над тілом силами стаціонарного потенціального поля, не залежить від форми шляху і визначається лише його початковим і кінцевим положенням. Робота такого поля визначається:

$$A = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2}, \quad (1.183)$$



де $W_{П1}$, $W_{П2}$ – значення потенціальної енергії матеріальної точки у відповідних місцях простору.

Основна властивість потенціальної енергії: тіло намагається досягнути стану рівноваги, потенціальна енергія у якому має мінімальне значення.

І. Потенціальна енергія тіла на малій порівняно із радіусом Землі висоті викликає виникнення сили тяжіння, яка визначається:

$$G = mg. \quad (1.184)$$

Щоб підняти тіло з деякого нульового рівня на висоту h до нього необхідно прикласти силу, рівну за величиною з G , але протилежну за напрямом (направлену вгору):

$$|\vec{F}| = |\vec{G}|. \quad (1.185)$$

Робота сили F з переміщення тіла з положення “0” у положення « h » визначиться:

$$A = Fh = mgh. \quad (1.186)$$

З іншого боку ця робота чисельно рівна зміні потенціальної енергії тіла:

$$A = W_{П1} - W_{П2}. \quad (1.187)$$

Порівнюючи останні дві формули, враховуючи, що у положенні “0” потенційна енергія дорівнює нулю, одержимо вираз для потенціальної енергії тіла на висоті h над нульовим рівнем:

$$W_{П} = mgh. \quad (1.188)$$

Якщо тіло знаходиться на довільній відстані від центра Землі, то на тіло масою m діє сила тяжіння, яка визначається за формулою Ньютона:

$$F_m = k_G \frac{M_3 m}{r^2}, \quad (1.189)$$

де k_G - гравітаційна постійна.

Щоб віддалити тіло на dr від центра Землі, до нього треба прикласти силу F , рівну за величиною F_m , але протилежну за напрямом:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_m|. \quad (1.190)$$

Елементарна робота сили F з переміщення тіла у полі Земного тяжіння на dr дорівнює:

$$\delta A = F_m dr = k_G \frac{M_3 m}{r^2} dr. \quad (1.191)$$

Повна робота сили переміщення тіла з положення r_1 в положення r_2 визначиться інтегруванням:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k_G \frac{M_3 m}{r^2} dr = k_G M_3 m \left[\left(-\frac{1}{r_2} \right) - \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right], \quad (1.192)$$

що у свою чергу приводить до виразу:

$$A = -k_G \frac{M_3 m}{r_2} + k_G \frac{M_3 m}{r_1}. \quad (1.193)$$

З іншого боку ця робота чисельно дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, тоді вираз для визначення потенціальної енергії тіла на довільній відстані r від центра Землі:

$$W_{II} = -k_G \frac{M_3 m}{r}. \quad (1.194)$$

Знак «-» показує, що з віддаленням від Землі потенціальна енергія тіла збільшується (набуває меншого від'ємного значення).

Розглянемо визначення потенціальної енергії пружно деформованого тіла (рис. 1.53). Для здійснення деформації стержня треба зовнішній силі F виконати роботу проти сили пружності (F_{np}).

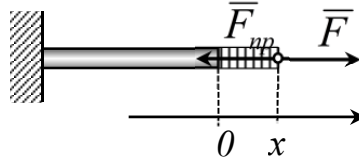


Рис. 1.53.

Сила пружності визначається виразом:

$$\bar{F} = -k\bar{x}, \quad (1.195)$$

де k - коефіцієнт пружності,

\bar{x} - вектор видовження стержня.

Елементарна робота сили F при видовженні стержня на dx дорівнює скалярному добуткові:

$$\delta A = kx dx. \quad (1.196)$$

Повна робота з розтягу (деформації) стержня на довжину x визначиться:

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} - 0. \quad (1.197)$$

З іншого боку ця робота чисельно рівна зміні потенціальної енергії тіла. Тоді вираз для визначення потенціальної енергії пружно деформованого тіла набуває вигляду:

$$W_{II} = \frac{kx^2}{2}. \quad (1.198)$$

Закон збереження енергії у механіці пов'язує кінетичну та потенціальну енергії тіла. Він є окремим випадком загального закону збереження енергії.

У замкненій системі енергія може перетворюватися з одних видів у інші і передаватися від одного тіла до іншого, але при цьому її загальна кількість залишається незмінною.

Розглянемо окремі випадки.

1. Система замкнена, консервативна.

Ізольовані системи тіл, у яких існують лише потенціальні (консервативні) сили і не відбувається перетворення механічної енергії в інші види енергії, називаються ізольованими консервативними системами. Для них справедливий закон збереження енергії у механіці: *механічна енергія ізольованої консервативної системи не змінюється в процесі її руху:*

$$E = W_k + W_{II} = \text{const.} \quad (1.199)$$

2. Система замкнена, неконсервативна.

Якщо система взаємодіючих тіл замкнена, але неконсервативна, то її механічна енергія не зберігається. Закон зміни повної механічної енергії в

цьому випадку набуває такого формулювання: зміна механічної енергії замкненої неконсервативної системи дорівнює роботі внутрішніх непотенціальних сил:

$$\Delta E = A_{nn}^i \quad (1.200)$$

Прикладом такої системи є система, в якій присутні сили тертя. Для такої системи справедливим є закон збереження повної енергії:

$$E = W_k + W_{II} + \Delta E = const. \quad (1.201)$$

3. Система незамкнена, неконсервативна.

Якщо система взаємодіючих тіл незамкнена та неконсервативна, то її механічна енергія не зберігається. У такому випадку закон зміни повної механічної енергії формулюється таким чином: зміна механічної енергії такої системи дорівнює сумарній роботі внутрішніх та зовнішніх непотенціальних сил:

$$\Delta E = A_{nn}^i + A_{nn}^e. \quad (1.202)$$

При цьому змінюється внутрішня енергія системи.

Приклад розв'язку задачі

Вантаж масою $m_1=200$ кг піднімається за допомогою електричної лебідки (рис. 1.54). Барабану надається постійний крутний момент $M_0=640$ Нм. Моменти інерції блоку і барабану відносно їх вісей обертання дорівнюють відповідно $I_2=3$ кг·м² $I_3=0,1$ кг·м², а їх радіуси – $R=0,2$ м і $r=0,1$ м. Визначити кутову швидкість обертання барабану у момент, коли вантаж підніметься на висоту h . У початковий момент система знаходилася у спокої. Масою троса знехтувати.

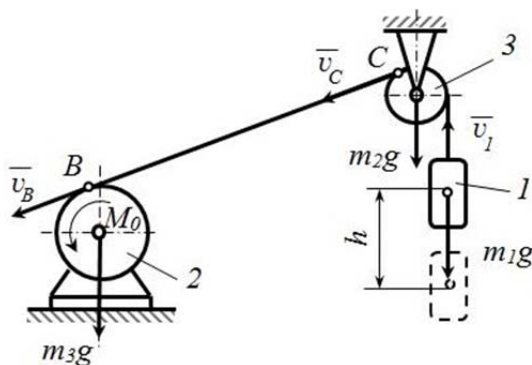


Рис. 1.54.

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи:

$$W_k - W_{k0} = A.$$

Оскільки в початковий момент система знаходилася у спокої, то $W_{k0} = 0$ тому маємо:

$$W_k = A,$$

де W_k - кінетична енергія системи в кінцевий момент часу

A - робота сил, що діють на систему.

Визначаємо кінетичну енергію системи:

$$W_k = W_{k1} + W_{k2} + W_{k3},$$

де W_{k1} , W_{k2} , W_{k3} - кінетична енергія вантажу, блоку і барабана відповідно.

Барабан і блок обертаються навколо нерухомих вісей, тому згідно із формулою (1.174):

$$W_{k2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

$$W_{k3} = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

де ω_2, ω_3 - кутові швидкості барабану і блоку.

Швидкість точки В дотику тросу і барабану рівна $v_B = \omega_2 R$. Цю ж швидкість має і точка С дотику тросу і блоку, тобто $v_C = v_B$. Знаючи швидкість v_B , знаходимо кутову швидкість блоку:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{r} \text{ або } \omega_3 = \omega_2 \frac{R}{r}.$$

Отже:

$$W_{k3} = \frac{1}{2} I_3 \omega_2^2 \frac{R^2}{r^2}.$$

Вантаж l рухається поступально із швидкістю $v_l = v_C = \omega_2 R$, оскільки вважаємо, що трос не розтягується. Тоді кінетична енергія вантажу дорівнює:

$$W_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_l^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_2^2 R^2.$$

Підставляючи вирази W_{k1}, W_{k2}, W_{k3} у вираз кінетичної енергії системи, отримуємо:

$$W_{k2} = \frac{1}{2} I_{np} \omega_2^2,$$

де I_{np} - приведений до вісі обертання барабану момент інерції системи, який визначається:

$$I_{np} = I_2 + \frac{R^2}{r^2} I_2 + m_1 R^2,$$

$$I_{np} = 3 + \frac{0,3^2}{0,1^2} 0,1 + 200 \cdot 0,3^2 = 21,9 \text{ кг м}^2.$$

Визначаємо роботи. Робота сил тяжіння барабану і блоку, а також реакцій їх опор дорівнює нулю, оскільки точки прикладання цих сил нерухомі.

Робота сили тяжіння вантажу рівна:

$$A_1 = - m_1 g h = - 200 \cdot 9,8 \cdot 4 = - 7840 \text{ Дж.}$$

Роботу крутного моменту M_0 обчислюємо за формулою (1.156):

$$A_2 = M_0 \varphi_2$$

де φ_2 - кут повороту барабану, рівний h/R .

Таким чином:

$$A_2 = M_0 h/R = 640 \cdot 4/0,3 = 8533,3 \text{ Дж.}$$

Робота усіх сил, що діють на систему, рівна:

$$A = A_1 + A_2 = - 7840 + 8533,3 = 693,3 \text{ Дж.}$$

Підставляючи значення T і A у формулу $T=A$, отримуємо рівняння:

$$\frac{1}{2} I_{np} \omega^2 = A = 693,3,$$

звідки знаходимо кутову швидкість барабану:



$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{I_{np}}} A = \sqrt{\frac{2}{21,9} \cdot 693,3} = 7,96 \frac{1}{c}.$$

Питання для самоперевірки

1. *Надайте визначення кінетичної енергії матеріальної точки, механічної системи.*
2. *Як визначається кінетична енергія тіла при обертальному русі?*
3. *Як визначається кінетична енергія тіла при плоскопаралельному русі?*
4. *Як пов'язана кінетична енергія матеріальної точки та її імпульс?*
5. *Поясніть теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи.*
6. *Поясніть поняття «силове поле» та «потенційна енергія».*
7. *Як визначається потенційна енергія гравітаційного поля, деформованого пружного тіла?*
8. *Чим відрізняються ізольовані консервативні та неконсервативні системи?*
9. *Сформулюйте закон збереження енергії у механіці.*

Модуль 2. ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

2.1. Опір матеріалів

Опір матеріалів - наука про міцність, жорсткість і надійність елементів інженерних конструкцій. Основні поняття опору матеріалів ґрунтуються на законах і теоремах загальної механіки і, в першу чергу, на законах статички. На відміну від теоретичної механіки опір матеріалів розглядає внутрішні силові фактори, які виникають у твердих тіла, що деформуються. Опір матеріалів має на меті створити способи розрахунку типових елементів конструкцій.

У розрахунках опору матеріалів розглядаються і розв'язуються на рівні інженерних методів питання про міцність, жорсткість та стійкість елементів конструкцій (деталей машин та споруд).

Міцність – здатність конструкцій (також матеріалів, з яких вони виготовлені) чинити опір руйнуванню під дією навантажень (також температурних, електромагнітних полів і інших зовнішніх факторів).

Жорсткість – здатність конструкцій чинити опір деформуванню (зміні форми і розмірів) під дією навантажень.

Стійкість – здатність конструкцій утримувати початкову форму рівноваги. Як приклад втрати стійкості слід навести викривлення тонкого прямолінійного стержня, що знаходиться під дією стискальних сил.

Типовими задачами розрахунків на міцність є:

- 1) задача аналізу (перевірка міцності та жорсткості): при заданих навантаженнях визначити напруження і деформації та перевірити, чи не перевищують вони допустимих значень;
- 2) задача синтезу (проектувальні розрахунки): підбір матеріалів та визначення розмірів елементів конструкцій при заданих навантаженнях;
- 3) розрахунок вантажопідйомності: при заданих параметрах конструкції визначити граничні або руйнівні навантаження.

Уперше питання про розрахунок на міцність було розглянуто у роботах відомого італійського вченого Галілео Галілея. Значний внесок в розвиток розрахунків зробили відомі вчені: Леонард Ейлер, Д. І. Журавський, Ф. С. Ясинський, С. П. Тимошенко, М. М. Беляєв, О. М. Крилов, С. В. Серенсен, Г.С. Писаренко та інші.

При розрахунках на міцність враховуються лише головні фактори і особливості форми. При цьому реальна конструкція замінюється спрощеною моделлю, що має назву «розрахункова схема».

Геометричні форми деталей зводять до трьох видів розрахункових схем (моделей).

1. Брус (одновимірна схема) – тіло, у якого довжина значно більша за розміри поперечного перерізу. Прямий брус, що зазнає розтягу або стиску називається стержнем. Якщо брус працює на згин, то його називають балкою, а на кручення – валом.

2. Оболонка (двовимірна схема) – тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина оболонки) значно менша інших розмірів. Пластина – оболонка з плоскими поверхнями.



3. Масив (тривимірна схема) – тіло, у якого всі три характерні розміри одного порядку, тобто для якого не можуть бути прийняті попередні схеми.

У процесі роботи машин та споруд їх деталі сприймають різноманітні навантаження, або різні сили, моменти сил. Зовнішні сили поділяють на об'ємні та поверхневі.

Об'ємні сили це прикладені до кожної частини матеріалу деталі. Ці сили можуть бути обумовлені дією гравітаційного поля (сили ваги), електромагнітного поля або прискореним рухом деталі (сили інерції).

Поверхневі сили можуть моделюватися на схемі як зосереджені, якщо вони діють на площині, розміри якої малі у порівнянні з розміром елемента конструкції, та розподілені, прикладені по довжині або площі елемента конструкції. Прикладом зосередженої сили є тиск колеса вагону на рейку, а розподіленої – тиск газів у циліндрі поршневої машини.

У функції часу навантаження розподіляються на постійні та тимчасові, змінні та повторно-змінні (циклічні).

У залежності від того, чи викликають навантаження суттєві прискорення, їх розподіляють на статичні та динамічні.

Статичні навантаження залишаються незмінними і тому не викликають прискорень ($a = 0$). Квазістатичними називають сили, які змінюються дуже повільно, тому викликані ними прискорення дуже малі ($a \approx 0$) і можна нехтувати ними.

Динамічні навантаження – такі, що викликають значні прискорення. Зокрема, прикладом динамічних навантажень можуть бути: раптові, які дуже швидко сягають своєї повної величини (тиск колеса автомобілю, коли він заїжджає на міст); ударні – діють протягом дуже короткого проміжку часу; повторно-періодичні (циклічні).

Щодо фізичних властивостей матеріалу, то його вважають у більшості інженерних моделей суцільним, однорідним, ізотропним та деформованим.

Суцільність – припущення, згідно із яким властивості матеріалу моделі поширюються на нескінченно малі об'єми і не враховується дискретна, атомістична структура речовини. Вважається також, що суцільність не порушується при деформуванні тіла.

Однорідність матеріалу означає однакові його властивості у всіх точках тіла (деталі).

Ізотропність означає, що у будь-якій точці тіла властивості матеріалу однакові за різними напрямками. Прикладом анізотропного матеріалу є деревина, у котрого міцність уздовж і впоперек волокон різна.

Деформований матеріал – це матеріал, здатний до деформування. Поняття, пов'язані з цим, розглядаються більш детально нижче.

2.1.1. Внутрішні силові фактори

Необхідним етапом оцінки міцності та жорсткості деталі є аналіз внутрішніх сил. Для визначення внутрішніх сил використовується метод перерізів. Сутність цього методу визначається послідовністю таких операцій (рис. 2.1):

- 1) умовно робимо переріз у місці визначення внутрішніх сил;
- 2) відкидаємо одну з двох частин перерізаної деталі;
- 3) дію відкинутої частини на залишену замінюємо внутрішніми силами.

Ці сили урівноважуються зовнішніми силами, що прикладені до залишеної частини;

- 4) визначаємо невідомі внутрішні сили з рівнянь рівноваги.

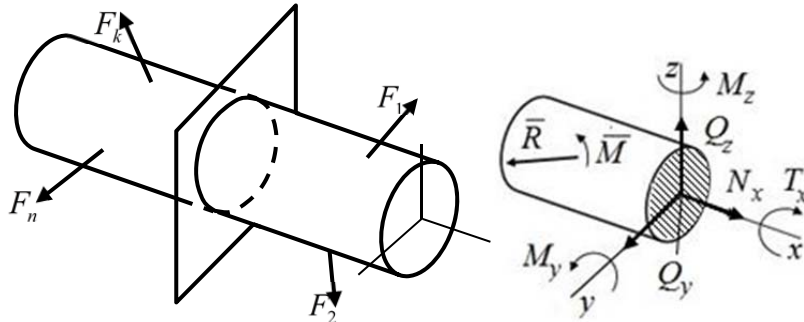


Рис. 2.1. До пояснення методу перерізів.

У загальному випадку просторової задачі система внутрішніх сил (рис. 2.1 б) зводиться до головного вектора сил \bar{R} , прикладеного у центрі ваги перерізу, та головного моменту \bar{M} , які розкладаємо за осями координат:

$$\bar{R} = \bar{N}_x + \bar{Q}_y + \bar{Q}_z; \quad \bar{M} = \bar{T}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z. \quad (2.1)$$

Шість внутрішніх силових факторів, що виникають у перерізі деталі в загальному випадку, мають такі назви:

\bar{N}_x – поздовжня сила (або нормальна);

\bar{Q}_y, \bar{Q}_z – поперечні сили;

\bar{T}_x – крутний момент;

\bar{M}_y, \bar{M}_z – згинальні моменти.

Для визначення невідомих внутрішніх силових факторів (ВСФ) використовують шість рівнянь рівноваги статки:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; & \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; & \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; & \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; & \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Задача вважається статично невизначеною, якщо неможливо лише за допомогою методу перерізів та рівнянь рівноваги (2.2) винайти внутрішні силові фактори. Розв'язання таких задач неможливе без додаткового аналізу деформованого стану деталі або споруди.

Одним із головних понять основ розрахунку на міцність є механічне напруження. Напруження є локальною мірою внутрішніх сил і характеризує їх інтенсивність на нескінченно малій площі перерізу.

Одиницею вимірювання механічних напружень є паскаль ($1\text{Па} = 1\text{Н/м}^2$). Розглянемо переріз тіла (рис. 2.2). Взагалі положення перерізу визначається

напрямом зовнішньої нормалі до нього. На рисунку 2.2 маємо переріз з нормаллю x (поперечний переріз стержня).

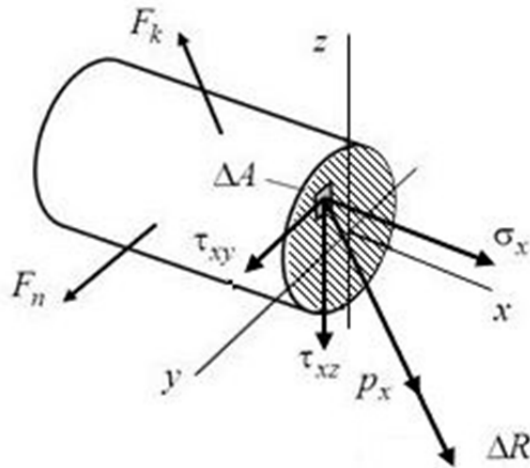


Рис. 2.2. Повне механічне напруження та його складові.

Біля довільної точки виділимо елементарну площадку ΔA , а рівнодійну внутрішніх сил на цій площадці позначимо $\Delta \bar{R}$.

Тоді повним напруженням у точці на площадці з нормаллю x називають відношення:

$$\bar{p}_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A} \quad (2.3)$$

Складові повного напруження p_x мають такі позначення і назви:

σ_x – нормальне напруження (за нормаллю x до перерізу);

τ_{xy} , τ_{xz} – дотичні напруження (лежать у площині перерізу).

Модуль повного напруження на площадці з нормаллю x

$$p_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (2.4)$$

На відміну від звичайних векторів, недостатньо знати величину та напрям вектора \bar{p}_x , необхідна також його прив'язка до відповідної площадки. Тому вектор повного напруження є вектором другого рангу, і з цим, зокрема, пов'язана подвійна індексація його складових τ_{xy} , τ_{xz} (перший індекс вказує нормаль до перерізу, а другий – напрям дотичного напруження).

Напруження залежить від орієнтації перерізу. Сукупність напружень, що діють по різних площадках, проведених через точку, характеризують напружений стан у точці.

Зміна форми і розмірів деталі або споруди під дією зовнішніх сил або теплового впливу називається деформуванням. Деформація є мірою (кількісною характеристикою) деформування. Геометрично деформації поділяють на лінійні ϵ і кутові γ . Лінійна деформація характеризує відносне подовження або скорочення нескінченно малого відрізка, уявно відкладеного у відповідному напрямку із заданої точки. Кутова деформація γ є зміною початкових прямих кутів.

За фізичною ознакою деталь може деформуватися пружно чи пластично. Пружне деформування – це деформування, при якому після повного

розвантаження деталь повертається до своєї початкової форми і розмірів, а при пластичному деформуванні – не повертається. Відповідно до цього, деформації, які зникають після розвантаження, називають пружними, а ті, що залишаються – пластичними (або залишковими).

Розрізняють чотири прості види навантаження бруса і відповідних їм види деформування:

- розтяг або стиск, який характеризується наявністю лише нормальних внутрішніх сил N та подовженням або вкороченням бруса Δl ;
- зсув, який характеризується наявністю лише внутрішніх дотичних сил $Q \neq 0$ та відносним паралельним зміщенням двох суміжних поперечних перерізів;
- згин, що характеризується наявністю внутрішнього згинального моменту та супроводжується викривленням вісі бруса;
- кручення характеризується наявністю внутрішнього крутного моменту T та кутом взаємного закручування перерізів $\Delta\varphi$ відносно вісі бруса.

Комбінація простих видів навантаження (деформування) бруса називається складним навантаженням (деформуванням).

Основні принципи розрахунків на міцність. Багаторічні експериментальні дослідження та досвід розрахунків на міцність дозволили фахівцям сформулювати кілька додаткових принципів, які є загальноприйнятими та спрощують розрахунки:

1. Принцип початкових розмірів. Малі деформації і переміщення деталі (споруди) не враховуються при складанні рівнянь рівноваги. Тобто деталь розглядається як недеформована, але тільки на етапі статичного аналізу.

2. Принцип суперпозиції або незалежності дії сил. Якщо деформації (напруження) змінюються пропорційно до навантажень (лінійність системи), то можна у довільному порядку додавати деформації (напруження), що виникли від дії окремих сил. Загальний деформований (напружений) стан деталі не залежить від порядку прикладання зовнішніх сил.

3. Принцип Сен-Венана. Якщо довільне навантаження прикладене в області, розмір δ якої малий у порівнянні з розмірами деталі, то деформований (напружений) стан у точках, віддалених від місця навантаження на δ чи більше, практично не залежить від конкретного способу прикладання навантаження. Наприклад, розподілені сили, прикладені в малій області, можна замінити в розрахунковій схемі зосередженою рівнодіючою силою.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняттям: «міцність», «жорсткість», «стійкість».
2. У чому полягає метод перерізів?
3. Які внутрішні силові фактори виділяють у перерізі тіла?
4. Що розуміють під напруженням?
5. Охарактеризуйте види напружень.
6. Вкажіть види деформацій та особливості внутрішніх силових факторів, якими деформації характеризуються.



2.1.2. Деформація розтягу (стиску)

Осьовим (центральною) розтягом або стиском брусу – називається такий простий вид навантаження, при якому єдиним внутрішнім силовим фактором у поперечному перерізі цього стержня є внутрішня повздовжня сила N .

Простіше за все цей вид навантаження можна реалізувати, якщо прикласти до стержня зовнішню силу F , лінія дії якої збігається з його віссю (рис. 2.3,а).

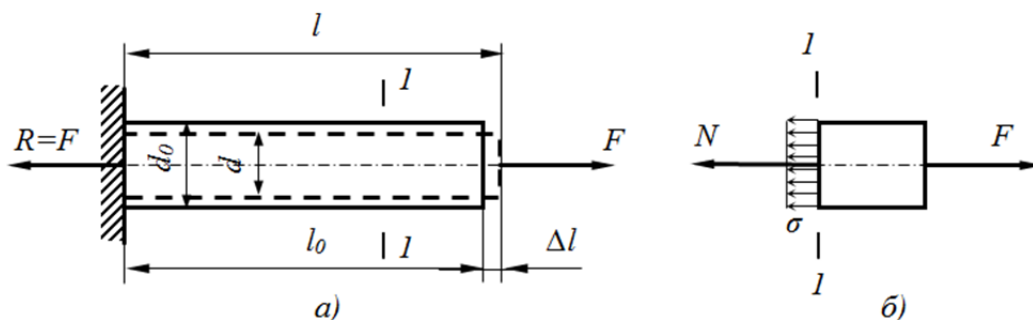


Рис. 2.3. – Модель розтягу брусу

Для визначення внутрішньої повздовжньої сили N застосуємо метод перерізів (рис. 2.3,б).

З умов рівноваги уявно відрізаної частини стержня отримаємо: $N=F$. У загальному випадку, коли зовнішніх сил декілька, повздовжня сила N у поперечному перерізі стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стержня зовнішніх сил, розташованих з однієї сторони перерізу.

Повздовжні сили і напруження, що відповідають деформації розтягу, прийнято вважати додатними, а деформації стискання від'ємними:

$N > 0$, якщо вона розтягує (напрявлена від перерізу);

$N < 0$, якщо вона стискає (напрявлена до перерізу).

Відповідно до гіпотези Бернуллі вважають, що у поперечних перерізах діють лише рівномірно розподілені нормальні напруження σ . Таким чином нормальні напруження визначаються:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.5)$$

де A – площа перерізу.

Розтягнутий стержень деформується (рис. 2.3) і змінює свої повздовжні та поперечні розміри на відповідні величини $\Delta l = l - l_0 > 0$ та $\Delta d = d - d_0 < 0$ (при стиску було б $\Delta l < 0$ та $\Delta d > 0$).

Відносні деформації:

$$\text{повздовжня} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}; \quad (2.6)$$

$$\text{поперечна} \quad \varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}. \quad (2.7)$$

Експериментально встановлено, що у межах пружних деформацій для кожного матеріалу зберігається постійне відношення:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.8)$$

Ця константа називається коефіцієнтом поперечної деформації, або коефіцієнтом Пуассона. Для будь-яких ізотропних матеріалів $0 \leq \mu \leq 0,5$. Для більшості конструкційних матеріалів $\mu \approx 0,3$; для пробки $\mu = 0$, для гуми, рідини, а також при пластичних деформаціях твердих тіл можна прийняти $\mu \approx 0,5$.

Залежність між напругою та відносною лінійною деформацією у зоні пружних деформацій підпорядковується закону Гука: *нормальні напруження прямо пропорційні лінійним деформаціям*:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.9)$$

В формулі (2.9) E – модуль повздовжньої пружності або модуль пружності першого роду. Він характеризує властивості матеріалу опиратися пружному деформуванню, тобто чим більший модуль E , тим менше деформується матеріал. Оскільки ε – безрозмірна величина, то одиниці вимірювання E ті ж, що і у напруження σ , тобто паскаль. Для конструкційних сталей можна приймати $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, для міді $E \approx 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Якщо у формулу (2.9) закону Гука підставити значення σ та ε з (2.5) і (2.6), то отримаємо запис закону Гука для визначення абсолютних деформацій:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A}. \quad (2.10)$$

У цій формулі добуток EA називається жорсткістю при розтязі. Слід враховувати, що формулою (2.10) можливо користуватися на ділянці стержня, в межах якої N і A залишаються постійними.

При розв'язанні задач деформації твердого тіла широко використовується ілюстративний метод побудови епюр: напружень, переміщень і т. ін.

Епюра – графічне зображення розподілу (графік) силових факторів по довжині елементу (стержня, брусу, пластини і т. ін.), що розглядається, або його перерізу (рис. 2.4).

Приклад розв'язування задач

Побудувати епюри повздовжніх сил, нормальних напружень і переміщень поперечних перерізів по довжині стержня, якщо $F_1=1000 \text{ Н}$, $F_2=2000 \text{ Н}$, $F_3=4000 \text{ Н}$; $A_1=20 \text{ см}^2$, $A_2=10 \text{ см}^2$, $A_3=25 \text{ см}^2$; $l_1=l_2=l_3=l_4=l_5=0,25 \text{ м}$.

Розбиваємо стержень на ділянки, починаючи від вільного кінця. Межі ділянок проходять через точки прикладання зовнішніх сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу.

1. Побудова епюри поздовжніх сил. Проводимо довільний переріз $I-I$ на ділянці 1 і складаємо для частини стержня, наведеної окремо на рис. 2.4, б, рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_x = 0, \text{ або } F_1 - N_I = 0; N_I = F_1 = 1000 \text{ Н}$$

Легко помітити, що в перерізі $II-II$ на ділянці 2 $N_2 = F_1 = 1000 \text{ Н}$ (рис. 1.1, в).

Проводимо переріз $III-III$ на ділянці 3 , розглядаємо праву залишену частину стержня (рис. 2.4, г) і одержимо:

$$\Sigma F_x = F_1 - F_2 - N_3 = 0,$$

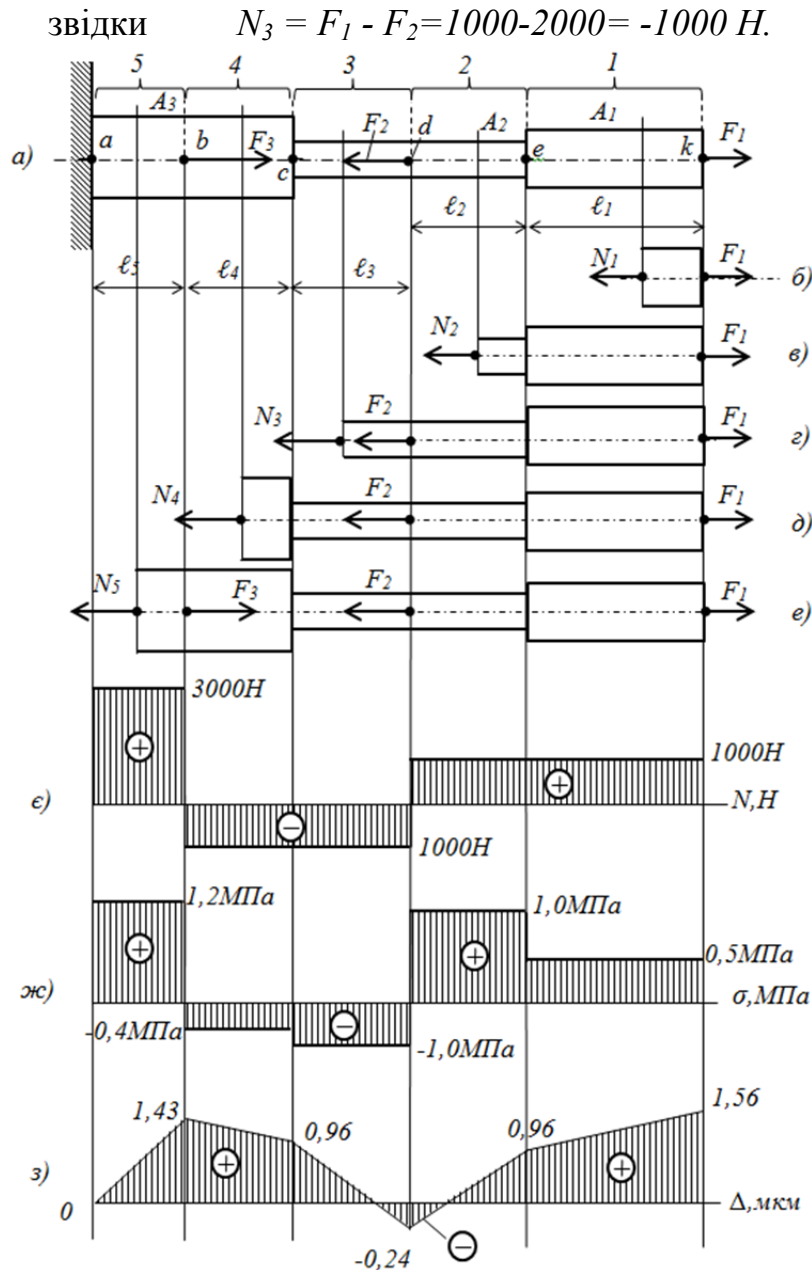


Рис. 2.4. Розрахункова схема та епюри напружень та деформацій.

Знак “мінус” вказує, що ділянка 3 зазнає стискування.

На ділянці 4 у перерізі IV-IV діє та ж поздовжня сила, що і на ділянці 3 (рис. 2.4,д), тобто $N_4 = -1000 \text{ Н}$.

Складаючи для частини стержня, наведеної на рис.2.4,е рівняння рівноваги отримуємо:

$$\Sigma F_x = F_1 - F_2 + F_3 - N_5 = 0; N_5 = 1000 - 2000 + 4000 = 3000 \text{ Н}.$$

Для побудови епюри N проведемо вісь абсцис, паралельно вісі стержня (рис. 2.4,е). Величини повздовжніх сил відкладаємо у вибраному масштабі від вісі епюри (вгору - додатні значення, вниз - від’ємні). У місцях прикладання зосереджених сил на епюрі відбувається стрибкоподібна зміна значення сили. Величина ”стрибка” дорівнює прикладеній у відповідному місці стержня зовнішній зосередженій силі. На епюру перпендикулярно вісі наносять штриховку. Кожна лінія штриховки – це ордината графіка.

2. Побудова епюри напружень. Значення нормальних напружень розраховуємо за формулою:

Для ділянки 1: $\sigma_1 = N_1/A_1 = 1000/(20 \cdot 10^{-4}) = 500000 \text{ Па} = 0,5 \text{ МПа}$.

Для ділянки 2: $\sigma_2 = N_2/A_2 = 1000/(10 \cdot 10^{-4}) = 1000000 \text{ Па} = 1,0 \text{ МПа}$.

Для ділянки 3: $\sigma_3 = N_3/A_2 = -1000/(10 \cdot 10^{-4}) = -1000000 \text{ Па} = 1,0 \text{ МПа}$.

Для ділянки 4: $\sigma_4 = N_4/A_3 = -1000/(25 \cdot 10^{-4}) = -400000 \text{ Па} = 0,4 \text{ МПа}$.

Для ділянки 5: $\sigma_5 = N_5/A_3 = 3000/(25 \cdot 10^{-4}) = 1200000 \text{ Па} = 1,2 \text{ МПа}$.

У межах кожної з ділянок напруження постійні, тобто епюра паралельна вісі абсцис (рис. 2.4, жс).

Для розрахунків на міцність цікаві перерізи, у яких виникають найбільші напруження, так звані небезпечні перерізи (див. ділянку 5, рис. 2.4, жс).

3. Побудова епюри переміщень. Для побудови епюри переміщень, достатньо визначити видовження окремих ділянок стержня:

$$\Delta \ell_{ab} = \frac{\sigma_5 \cdot ab \cdot 10^6}{E} = \frac{1200000 \cdot 0,25 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^{11}} = 1,43 \text{ мкм}$$

$$\Delta \ell_{bc} = \frac{\sigma_4 \cdot bc \cdot 10^6}{E} = \frac{-400000 \cdot 0,25 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^{11}} = -0,47 \text{ мкм}$$

$$\Delta \ell_{cd} = \frac{\sigma_3 \cdot cd \cdot 10^6}{E} = \frac{-1000000 \cdot 0,25 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^{11}} = -1,2 \text{ мкм}$$

$$\Delta \ell_{de} = \frac{\sigma_2 \cdot de \cdot 10^6}{E} = \frac{1000000 \cdot 0,25 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^{11}} = 1,2 \text{ мкм}$$

$$\Delta \ell_{ek} = \frac{\sigma_1 \cdot ek \cdot 10^6}{E} = \frac{500000 \cdot 0,25 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^{11}} = 0,6 \text{ мкм}$$

Побудову епюри переміщень слід завжди починати від нерухомого перерізу, який у даному прикладі співпадає з жорстким защемленням у точці a , тобто $\Delta x_a = 0$.

Переміщення перерізу b дорівнює видовженню ділянки ab (5 ділянка) стержня:

$$\Delta x_b = \Delta \ell_{ab} = 1,43 \text{ мкм}$$

При видовженні ділянки ab переріз b переміщується праворуч. Відповідну ординату будемо вважати додатною і відкладемо (у вибраному масштабі) вгору від вісі епюри (рис. 2.4, з).

Переміщення перерізу c складається з переміщення перерізу b і видовження ділянки 4 ($\Delta \ell_{bc}$):

$$\Delta x_c = \Delta \ell_{ab} + \Delta \ell_{bc} = 1,43 + (-0,47) = 0,96 \text{ мкм}$$

Переріз c також переміщується вправо

Аналогічно визначаємо переміщення перерізу d :

$$\Delta x_d = \Delta \ell_{ab} + \Delta \ell_{bc} + \Delta \ell_{cd} = 1,43 + (-0,47) + (-1,2) = -0,24 \text{ мкм}$$

Переміщення перерізу e :

$$\Delta x_e = \Delta \ell_{ab} + \Delta \ell_{bc} + \Delta \ell_{cd} + \Delta \ell_{de} = 1,43 + (-0,47) + (-1,2) + 1,2 = 0,96 \text{ мкм}$$

Переміщення перерізу k :



$$\Delta x_k = \Delta l_{ab} + \Delta l_{bc} + \Delta l_{cd} + \Delta l_{de} + \Delta l_{ek} = 1,43 + (-0,47) + (-1,2) + +1,2 + 0,6 = 1,56 \text{ мкм}$$

Наносимо знайдені значення переміщень на епюру (рис. 2.4,з)

Питання для самоперевірки

1. Що називається абсолютним і відносним видовженням при деформації розтягу?
2. Сформулюйте закон Гука.
3. Що таке модуль поздовжньої пружності?
4. Що характеризує коефіцієнт Пуассона?
5. Як визначаються деформації при пружному розтягу?
6. Назвіть послідовність побудови епюр поздовжніх сил, нормальних напружень і переміщень при розтягу стержня.

2.1.3. Механічні характеристики міцності

Здатність конструкційних матеріалів виконувати свої функції при різних видах навантаження визначається величинами, які називають механічними характеристиками. До них відносять граничні напруження, залишкові деформації, ударну в'язкість, твердість та ін.

Механічні характеристики матеріалів визначають експериментально шляхом випробувань стандартних зразків під навантаженням.

За характером навантаження розрізняють випробування статичні, динамічні (ударним навантаженням) і на втомлюваність.

За видом деформації розрізняють випробування на розтяг, стиск, зріз, кручення, згинання та ін.

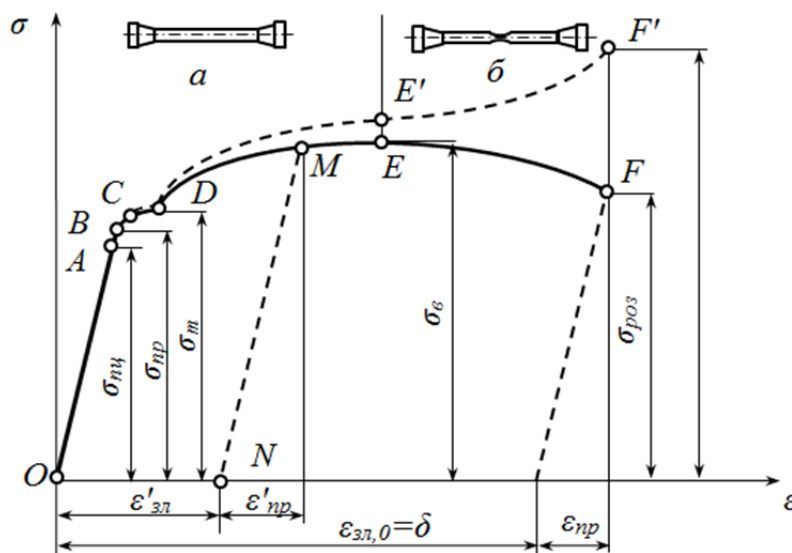


Рис. 2.5. Діаграма напружень для пластичних матеріалів:
а – вигляд зразка до межі тимчасового опору; б – вигляд зразка після утворення шийки.

Класичним є випробування на розтяг, результати яких є основою призначення характеристик міцності матеріалів. Для випробувань на розтягання використовують спеціально виготовлені зразки круглого перерізу (рис. 2.5,а). За результатами будують діаграму розтягу (рис. 2.5).

Наведемо назви ділянок і характерні точки діаграми.

1. Ділянка OA – зона пропорційності, де виконуються пропорційні співвідношення між Δl та $P = N$ або між ε та σ .

Границя пропорційності $\sigma_{mц}$ – це граничне напруження, до якого деформації матеріалу відповідають закону Гука.

Тангенс кута нахилу ділянки OA $tg\alpha = \sigma / \varepsilon = E$.

2. Ділянка AB – зона пружності.

Між точками A і B діаграма трохи викривляється і закон Гука вже не виконується з достатньою точністю. Але, якщо напруження не перевищують точки B , то при повному розвантаженні зразок повернеться до початкових розмірів, тобто до точки B деформації пружні.

Більш точно сказати, що при розвантаженні з точки B залишкові деформації не перевищують $0,05\%$, а умовну границю пружності позначають $\sigma_{0,05}$. Для сталі Ст.3 - $\sigma_{mц} \approx 210$ МПа, $\sigma_{0,05} \approx 220$ МПа.

3. Горизонтальна ділянка CD – площадка текучості. На цій ділянці деформація зростає практично без підвищення навантаження, і таке явище має назву текучості матеріалу.

Границя текучості (фізична) σ_m – це напруження, яке відповідає площадці текучості на діаграмі (рис. 2.5). Для сталі Ст.3 $\sigma_m \approx 240$ МПа

Діаграма розтягу багатьох конструкційних матеріалів не має горизонтальної площадки текучості, тому не може бути визначена фізична границя текучості. Для таких матеріалів через важливість цієї механічної характеристики вводять умовну границю текучості $\sigma_{0,2}$ – це таке напруження, якому відповідають залишкові деформації $0,2\%$.

4. Ділянка DE зона зміцнення. Після того, як матеріал пройшов стан текучості, він “зміцнюється”. До нього повертається здатність чинити опір розтягу. Для збільшення довжини зразка необхідно знову збільшувати навантаження. Але діаграма підіймається за точкою d більш полого, ніж у зоні пружності.

Границя міцності або тимчасовий опір σ_b – це відношення максимальної сили P_{max} , яку може витримати зразок до його початкової площі перерізу S_0 . Для сталі Ст. 3 $\sigma_b \approx 400-500$ МПа.

5. Ділянка EF - зона локальної текучості. Доки навантаження зростало від нуля до максимального значення (точка E), зростання деформацій як пружних, так і пластичних (залишкових) відбувалося рівномірно по всій розрахунковій довжині зразка. При досягненні на діаграмі точки E на зразку виникає місцеве звуження – шийка. З цієї миті деформації зростають лише поблизу шийки, яка швидко тоншає і, як наслідок, падає зусилля і умовне напруження. У точці F зразок розривається.

У процесі навантаження зразка його довжина зростає, а переріз зменшується. У точці E дійсна площа перерізу S_1 вже суттєво відрізняється від початкової площі S_0 , але для спрощення розрахунків усі характеристики міцності обчислюються, виходячи з величини S_0 , тобто в умовних напруженнях



(суцільна лінія на рис. 2.5). Діаграма дійсних напружень, для яких враховується зміна площі перерізу S , показана на рисунку 2.5 штриховою лінією.

За межами зони пружності матеріал зразка деформується пружно-пластично. Якщо з будь-якого місця діаграми (вище точки B), наприклад з точки M , провести розвантаження, то лінія розвантаження MN буде завжди паралельною ділянці OA . Точка N відповідає величині залишкової деформації $\varepsilon_{зл}$. Зрозуміло, що найбільше значення залишкової деформації відповідає моменту руйнування зразка $\varepsilon_{зл,0}$. Відношення найбільшого видовження зразка до початкового розміру δ у відсотках використовують для характеристики крихкості матеріалів:

$$\delta = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100 \%, \quad (2.11)$$

де ℓ_1, ℓ_0 - відповідно довжина зразка у момент руйнування та початкова довжина.

За величиною остаточного значення пластичної деформації матеріали поділяють на пластичні $\delta > 5\%$ (вуглецеві сталі, мідь тощо) та крихкі $\delta < 5\%$ (чавуні, скло, бетон тощо).

Якщо зразок, який знаходиться у зоні пружно-пластичної деформації (т. M) розвантажити (лінія MN), а потім знову навантажити, то лінія навантаження NM завжди збігається з лінією розвантаження. Якщо не враховувати залишкову деформацію і умовно помістити початок координат у точку N , то вийде, що зона пропорційності NM стала більшою ніж була спочатку. Таким чином, після попереднього пластичного деформування границя пропорційності матеріалу зростає. Це явище має назву наклеп і широко використовується у техніці для зміцнення деталей. Водночас наклеп ускладнює процес обробки деталей та надає матеріалу підвищеної крихкості.

Діаграми розтягу для крихких матеріалів суттєво відрізняються від діаграм пластичних (рис. 2.6,б). На діаграмах відсутні зони текучості, зміцнення та локальної текучості. Зразки руйнуються без утворення шийки.

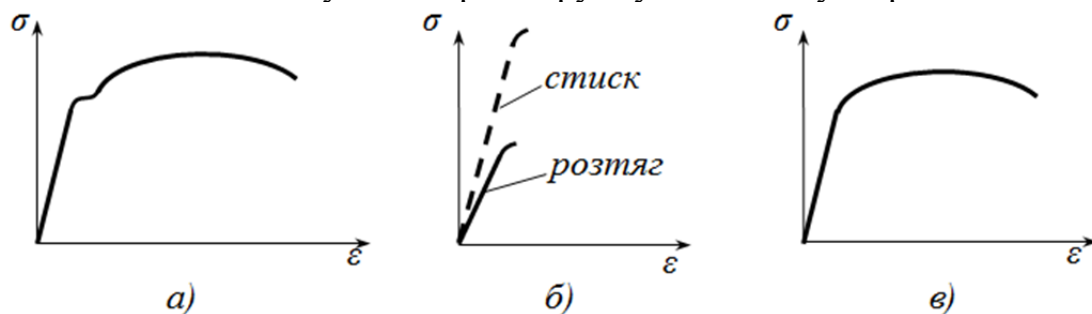


Рис. 2.6. Характерні вигляди діаграм розтягу для пластичних(а), крихких (б) та пружно-пластичних матеріалів (в).

Існує ряд матеріалів, які характеризуються пластичністю, але на їх діаграмах розтягу (рис. 2.6,в) відсутня зона текучості (наприклад алюміній, дюралюміній). Такі матеріали називають пружно-пластичними.

Діаграми стиску пластичних та пружно-пластичних матеріалів практично співпадають з діаграмами розтягу, відповідно такі матеріали мають однакові

характеристики міцності при сприйнятті навантажень розтягу – стиску. Інша справа для крихких матеріалів. Для них, при незмінному вигляді діаграм, межа міцності при стиску у кілька разів вища, ніж при розтягу (рис. 2.6,б). Ця особливість визначає використання крихких матеріалів у якості різного роду опор, тобто об'єктів (деталей, споруд), що працюють на стиск.

Безвідмовна робота будь-якого елемента конструкції можлива лише у тому випадку, коли максимальне напруження у ньому не перевищує деякої величини напружень. Максимальне безпечне напруження називається допустимим. Воно визначається як відношення граничного небезпечного напруження для заданого матеріалу при відповідній деформації (стиск або розтяг) до нормативного (призначеного нормами проектування конструкцій) коефіцієнту запасу:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{zp}}{[n]} \quad (2.12)$$

Нормативний коефіцієнт запасу n лежить у межах 1,5 - 5. Його значення залежить від умов роботи деталі, точності методів розрахунку, властивостей матеріалу, призначення конструкції та інших факторів. Більш детальні рекомендації щодо нормативного коефіцієнту запасу наводяться у спеціальній довідковій літературі в залежності від галузі техніки, досвіду проектування та експлуатації машин певного типу.

Граничним напруженням для пластичних матеріалів прийнято вважати границю текучості ($\sigma_{zp} = \sigma_m$), для пружно-пластичних границю досягнення відносної деформації 0,2% ($\sigma_{zp} = \sigma_{0,2}$), а для крихких матеріалів – границю міцності при розтягу ($\sigma_{zp} = \sigma_{mp}$) або стиску ($\sigma_{zp} = \sigma_{mc}$). Величини допустимих напружень деяких конструкційних матеріалів наведено у таблиці 2.1.

Орієнтовні значення допустимих напружень на розтяг (стиск)

Таблиця 2.1

№ з/п	Матеріал	Допустиме напруження, МПа	
		розтяг	стиск
1.	Чавун сірий	28...80	120...150
2.	Сталь Ст 3	160	160
3.	Сталь конструкційна вуглецева	60...250	60...250
4.	Сталь конструкційна легована	100...400 і вище	100...400 і вище
5.	Мідь	30...120	30...120
6.	Алюміній	30...80	30...80
7.	Дуралюмін	80...150	80...150
8.	Сосна вздовж волокон	7...10	10..12
9.	Сосна впоперек волокон	-	1,5...2
10.	Дуб вздовж волокон	9...13	13...15
11.	Дуб впоперек волокон	-	3...3,5

За допомогою поняття допустимої напруги умова міцності деталі має вигляд:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (2.13)$$

Умова міцності дозволяє розв'язувати задачі трьох типів:



1) перевіряти міцність стержня, тобто визначати за заданими розмірами поперечного перерізу і навантаженні, максимальне напруження σ_{max} і порівнювати його з допустимим за формулою (2.13).

2) визначати розміри поперечного перерізу за відомим навантаженням і величиною допустимого напруження. Наприклад для розтягу:

$$A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]}; \quad (2.14)$$

3) визначати величини допустимої поздовжньої сили за заданими розмірами поперечного перерізу стержня і відомим допустимим напруженням:

$$[N] \leq A [\sigma]. \quad (2.15)$$

Умова жорсткості, тобто обмеження деформації стержня постійного перерізу, буде мати вигляд:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A} \leq [\Delta l], \quad (2.16)$$

де $[\Delta l]$ – допустима з умов проектування лінійна деформація.

При навантаженні пружного тіла зовнішні сили виконують роботу на викликаних ними переміщеннях. Ця робота E у відповідності із законом збереження енергії переходить у потенціальну енергію U деформації пружного тіла. При розвантаженні тіла за рахунок потенціальної енергії виконується робота.

Таким чином, пружне тіло має здатність акумулювати енергію. Це особливість пружних тіл широко використовується в техніці при проектуванні пружин, ресор, амортизаторів і т. ін.

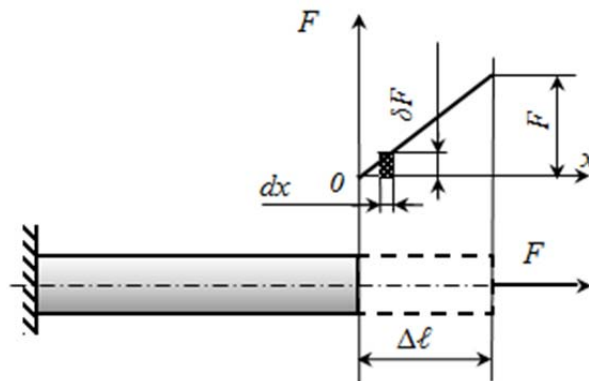


Рис. 2.7. Стержень, навантажений силою розтягу F (а) і діаграма залежності навантаження від переміщення (б)

Розглянемо стержень статично навантажений силою F (рис. 2.7). Під дією цієї сили стержень видовжиться на величину Δl . Діаграма залежності видовження від навантаження являє собою пряму, що проходить через початок координат.

Потенціальна енергія пружно деформованого стержня визначається за формулою (1.198):

$$W = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

З урахуванням закону Гука (2.9) можна записати:

$$W = \frac{F^2 l}{2E}. \quad (2.17)$$

Підставляючи в останню формулу замість зовнішньої сили F рівну їй внутрішню (повздовжню) силу N , одержимо:

$$W = \frac{N^2 l}{2EA^2}. \quad (2.18)$$

Якщо повздовжня сила N або площа поперечного перерізу змінюється вздовж вісі, то потенціальна енергія деформації має визначатися шляхом сумування за елементарними ділянками:

$$W = \int \frac{N^2}{2EA_2} dx. \quad (2.19)$$

Потенціальна енергія деформації пропорційна квадрату повздовжньої сили N , а тому завжди додатна.

Якщо площа поперечного перерізу або повздовжня сила змінюються за довжиною стрибкоподібно, то потенціальна енергія деформації підраховується окремо для кожної ділянки стержня з постійними N і A , а одержані результати додаються.

У техніці дуже часто використовуються деталі, що мають отвори, виступи, виточки, пропили та ін. При розтягу у місцях різкої зміни поперечного перерізу відбувається збільшення (концентрація) місцевих напружень.

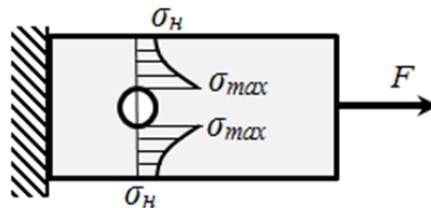


Рис. 2.8. Концентрація напружень поблизу круглого отвору при розтягу пластини.

Так, в пластині, що розтягується силою F , яка діє вздовж її вісі (рис. 2.8), максимальне напруження σ_{max} біля отвору значно перевищує номінальне σ_n .

Теоретичним коефіцієнтом концентрації напружень називають відношення:

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (2.20)$$

де $\sigma_n = \frac{N}{A_0}$,

N – нормальна сила у послабленому перерізі;

A_0 – площа послабленого перерізу.

У реальних умовах коефіцієнт концентрації напружень дещо менший теоретичного. Він називається ефективним коефіцієнтом концентрації напружень:

$$\beta = \frac{\sigma_\epsilon}{(\sigma_\epsilon)_k}, \quad (2.21)$$



де σ_{σ} – межа міцності матеріалу при випробуванні зразка без концентратора напружень;

$(\sigma_{\sigma})_k$ - межа міцності при випробуванні зразка з концентратором напружень.

**Коефіцієнти концентрації напружень в стержнях
круглого поперечного перерізу**

Таблиця 2.2

№ з/п	Вид концентратора напружень	Коефіцієнт концентрації напружень, α
1.	Перехід під прямим кутом	2,0
2.	Гостра V-подібна виточка	3,0
3.	Отвір при відношенні діаметру отвору до діаметру стержня 0,1...0,33	2,0
4.	Галтель при відношенні радіуса галтелі до діаметра стержня 0,125	1,5
5.	0,25	1,2
6.	0,5	1,1
7.	Риска від різця	1,2...1,4

Концентратори різко зменшують міцність елементів конструкцій, особливо виготовлених з крихких матеріалів, тому при проєктуванні намагаються уникати різких змін поперечних перерізів за рахунок галтелей та інших заокруглень.

Приклад розв'язування задач

Стальний стержень розтягується силою $F=150$ кН (рис.2.3). Визначити потрібні розміри поперечного перерізу стержня. В розрахунках прийняти $\sigma_m=570$ МПа, $\sigma_{\sigma}=720$ МПа, коефіцієнт запасу $[n]=1,5$.

Умова міцності при розтягу:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

Звідки:

$$A_{\min} = \frac{N_{\max}}{[\sigma]}.$$

Допустима напруга для сталі (пластичний матеріал - є межа текучості) визначається за формулою:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n]} = \frac{570}{1,5} = 380 \text{ МПа}.$$

Максимальна внутрішня сила у нашому випадку $N = F = 150 \text{ кН}$.

Мінімальна площа поперечного перерізу стержня:

$$A_{\min} = \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{150 \cdot 10^3}{380} = 394,7 \text{ мм}^2.$$

Для перерізу у вигляді круга діаметр стержня:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 394,7}{3,14}} = 22,4 \text{ мм}.$$

Закруглюємо значення діаметра до ближчого більшого стандартного, приймаємо $d=25$ мм.

Для прямокутного перерізу з відношенням сторін 1:2, менша сторона

$$a = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{394,7}{2}} = 14,05 \text{ мм}$$

Приймаємо стандартне значення $a=16\text{мм}$, тоді більша сторона $b=16 \cdot 2=32\text{мм}$.

Питання для самоконтролю

1. Назвіть характерні точки на діаграмі розтягу?
2. Що таке границя пропорційності, пружності, текучості, міцності та як вони обчислюються?
3. Що таке пружна, пластична деформації?
4. У яких одиницях вимірюється $\sigma_{пр}$ та σ_m ?
5. Які основні ділянки має діаграма розтягу?
6. Для яких матеріалів має місце ділянка текучості?
7. Що таке умовна границя текучості?
8. Чим відрізняються пластичні матеріали від крихких?
9. Які параметри характеризують міцність сталі?
10. Які параметри характеризують пластичність сталі?
11. У чому полягає явище наклепу?
12. У чому суть понять “умовне” та “дійсне” напруження?
13. Поясніть основні принципи розрахунків на міцність
14. Що називається допустимим напруженням? Як воно вибирається для пластичних і крихких матеріалів?
15. Що таке коефіцієнт запасу міцності?
16. Сформулюйте умову міцності стержня при розтягу.
17. Які три типи задач дозволяє розв’язувати умова міцності?
18. Що таке концентрація напружень і як вона впливає на міцність елементів конструкцій?

2.1.4. Чистий зсув. Закон Гука при зсуві

Зсув – це вид навантаження (деформування) бруса, при якому у поперечному перерізі бруса діє лише внутрішня поперечна сила Q . Практичним прикладом такого навантаження є різання ножицями.

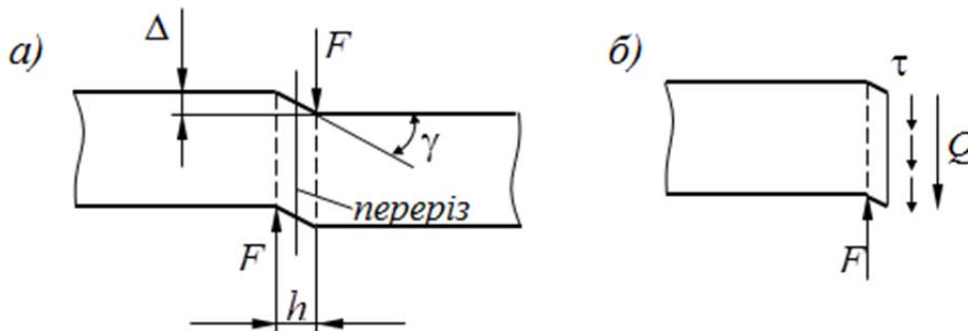


Рис. 2.9 – Модель зсуву при різанні прутка.



Розглянемо брус, перпендикулярно вісі якого прикладені дві рівні протилежно направлені сили F , лінії дії яких паралельні і знаходяться на незначній відстані h (рис. 2.9,а). При цьому елемент бруса довжиною h зазнає деформації зсуву. Для визначення поперечної сили використовуємо метод перерізів. З умови рівноваги лівої частини бруса (рис. 2.9,б) маємо:

$$Q = \int_A \tau dA = F. \quad (2.23)$$

З геометричної точки зору зсув характеризується величинами:

Δ – абсолютний зсув;

Δ/h – відносний зсув, що є мірою перекосу прямих кутів елемента.

При деформації елемента в межах пружності значення Δ/h дуже мале і його можливо виразити через кут зсуву:

$$\Delta/h = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (2.23)$$

Фізична сторона представлена законом Гука при зсуві: дотичні напруження прямо пропорційні кутовим деформаціям.

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (2.24)$$

де G - модуль пружності другого роду або модуль зсуву. Для сталі $G \approx 80 \text{ ГПа}$.

Можна довести теоретично, що модулі пружності першого та другого роду зв'язані між собою такою залежністю:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (2.25)$$

На практиці розподіл деформацій і напружень в перерізі умовно приймають рівномірним. Якщо прийнято, що $\tau = \text{const.}$, то можна цю величину винести за знак інтегралу в рівнянні (4.1). Тоді отримуємо розрахункову формулу:

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (2.26)$$

Підставивши у формулу закону Гука (2.24) вирази для h і τ , отримаємо формулу для визначення абсолютного зсуву:

$$\Delta = \frac{Q \cdot h}{G \cdot A}. \quad (2.27)$$

У цій формулі добуток GA називається жорсткістю при зсуві.

Незважаючи на те, що формули (2.26) і (2.27) з теоретичної точки зору не досить коректні, практичні розрахунки на міцність дають надійний результат, бо неточності методу враховуються нормативним коефіцієнтом запасу або величиною допустимого напруження $[\tau]$.

Умова міцності при зсуві має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]. \quad (2.28)$$

Умова жорсткості при зсуві має вигляд:

$$\Delta = \frac{Q \cdot h}{G \cdot A} \leq [\Delta]. \quad (2.29)$$

Питання для самоконтролю

1. Який вид деформації називається зсувом? Наведіть приклади.
2. Які напруги виникають при зсуві?
3. Поясніть закон Гука для деформації зсуву.
4. Який зв'язок між модулями пружності першого та другого роду?
5. Сформулюйте умови міцності і жорсткості при зсуві.

2.1.5. Деформація кручення

Кручення – це вид навантаження бруса, при якому у поперечному перерізі бруса діє лише внутрішній крутний момент T_x . Брус, навантажений крутним моментом, називають валом (незалежно від форми перерізу).

Приймаємо наступні припущення:

1. Вісь вала при крученні залишається прямолінійною.
2. Поперечні перерізи вала, плоскі до деформації, залишаються у своїй площині і лише повертаються навколо вісі вала. Відстані між поперечними перерізами вала у процесі деформації не змінюються.

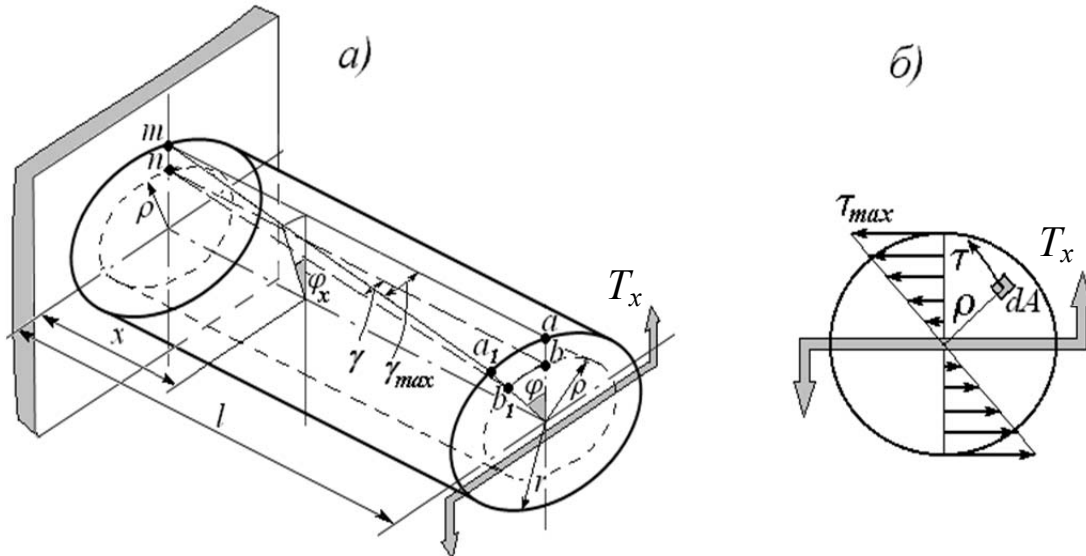


Рис. 2.10. Модель кручення круглого вала.

Кручення, у відповідності з цією моделлю, є результатом зсувів при обертанні поперечних перерізів (рис. 2.10).

Кут закручення φ_x вважають лінійною функцією x , тоді відносний кут закручення θ не змінюється по довжині вала:

$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{\varphi}{l} = \text{const.} \quad (2.30)$$

Прямолінійна твірна ta (рис. 2.10,а), нанесена на поверхні вала, перетворюється у гвинтову лінію ta_1 . Для неї відносний зсув (кут зсуву) визначається

$$\gamma_{\max} = \frac{aa_1}{l} = \frac{r \cdot \varphi}{l} = \theta \cdot r. \quad (2.31)$$



Якщо уявно вирізати циліндр радіусу ρ , то твірна nb на його поверхні перетворюється у гвинтову лінію $n\tilde{b}_1$. При закрученні на той же кут φ дуга $b\tilde{b}_1$ менша, ніж дуга $a\tilde{a}_1$, тому і відносний зсув буде меншим:

$$\gamma = \frac{b\tilde{b}_1}{l} = \frac{\rho \cdot \varphi}{l} = \theta \cdot \rho. \quad (2.32)$$

Рівняння (2.32) встановлює закон зростання кутових деформацій γ пропорційно відстані ρ від вісі валу. Це ключове рівняння для геометричної сторони задачі кручення.

Розглянемо статичну сторону задачі. Зробимо переріз на довільній відстані x від затиснення (рис.2.10,а). При зсуві у поперечних перерізах валу виникають лише дотичні напруження. Виділимо на перерізі (рис.2.10,б) нескінченно малу площадку dA на відстані ρ від вісі валу. Дотична сила τdA , яка діє на цій площадці, створює відносно вісі валу елементарний момент $dT_x = \tau dA \cdot \rho$. Повний момент внутрішніх сил (внутрішній крутний момент):

$$T_x = \int_A \tau \cdot \rho dA. \quad (2.33)$$

Момент T_x визначається за зовнішніми навантаженнями з умов рівноваги відрізаної частини валу.

Фізична сторона задачі представлена законом Гука при зсуві:

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (2.34)$$

З розв'язувальної системи рівнянь (2.32) – (2.34) після підстановки маємо:

$$T_x = \int_A G \cdot \gamma \cdot \rho dA = \int_A G \cdot \theta \cdot \rho \cdot \rho dA = G \cdot \theta \cdot \int_A \rho^2 dA = G \cdot \theta \cdot I_p, \quad (2.35)$$

Інтеграл $\int_A \rho^2 dA$ це полярний момент інерції поперечного перерізу валу I_p , тоді:

$$T_x = G \cdot \theta \cdot I_p. \quad (2.35)$$

З рівняння (2.35) отримаємо розрахункову формулу для відносного кута закручення:

$$\theta = \frac{T_x}{G \cdot I_p}, \quad (2.37)$$

де добуток GI_p називається жорсткістю при крученні.

Повний кут закручення:

$$\varphi = \int_l \theta dx = \frac{T_x \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (2.38)$$

Якщо вал має декілька ділянок, що відрізняються розмірами перерізів і значенням крутного моменту, то повний кут закручення дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручення окремих ділянок.

Після підстановки (2.38) у (2.32), а потім у (2.35), отримаємо загальну формулу дотичних напружень у довільній точці перерізу валу, що закручується:

$$\tau = \frac{T_x \cdot \rho}{I_p} \quad (2.39)$$

Таким чином, дотичні напруження при крученні зростають за лінійним законом пропорційно відстані точки перерізу від вісі валу. Згідно епюри напруження τ (рис. 2.10,б) у точках, однаково віддалених від вісі, рівні за величиною і напрямлені перпендикулярно радіус-вектору даної точки.

Максимальні напруження діють у найвіддаленіших від осі точках перерізу, при $\rho = \rho_{\max} = r$:

$$\tau_{\max} = \frac{T_x \cdot r}{I_p} = \frac{T_x}{W_p}, \quad (2.40)$$

де $W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярний момент опору.

Умова міцності при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{x\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (2.41)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при крученні; $[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]$

При необхідності перевіряють також умову жорсткості валу:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{x\max}}{G \cdot I_p} \leq [\theta], \quad (2.42)$$

де $[\theta]$ – допустимий погонний кут закручення.

У розрахунках на міцність та жорсткість деформаціями розтягу та зсуву використовувалась одна характеристика плоского перерізу – площа. У випадку згину та кручення міцність деталей залежить не лише від площі перерізу, а також від її форми. Характеристиками плоского перерізу є статичний, осьовий та полярний моменти інерції перерізу.

Статичними моментами перерізу (фігури) (рис. 2.11) відносно осей x і y називають інтеграли виду

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA; \quad (2.43)$$

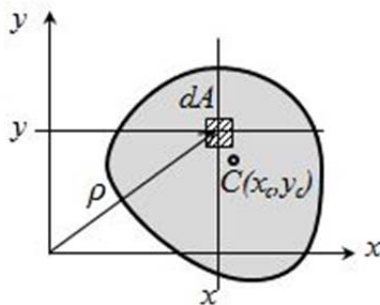


Рис. 2.11. До визначення моментів інерції плоскої фігури.

За аналогією з відомою теоремою теоретичної механіки про момент рівнодійної сили можна записати:

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c, \quad (2.44)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги перерізу, звідки:

$$y_c = \frac{S_x}{A}; \quad x_c = \frac{S_y}{A}. \quad (2.45)$$



Якщо вісі координат проходять через центр ваги перерізу, вони мають назву центральних. Статичні моменти перерізів відносно центральних осей дорівнюють нулю.

Осьовими моментами інерції перерізу (фігури) (рис.2.11) відносно осей x і y називають інтеграли виду:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (2.46)$$

Полярний момент інерції перерізу (фігури) (рис. 2.11):

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad (2.47)$$

де ρ – відстань елементарної площини до початку координат.

Внаслідок того, що $\rho^2 = x^2 + y^2$, з (2.46) і (2.47) отримуємо:

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (2.48)$$

Відцентровий момент інерції перерізу (фігури) (рис. 2.11):

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (2.49)$$

Головними осями інерції U і V перерізу називаються такі вісі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю ($I_{UV} = 0$). Осьові моменти інерції I_U , I_V відносно головних осей мають екстремальні значення.

Якщо початок головних осей збігається з центром ваги перерізу, то вісі мають назву головних центральних. У випадку наявності у фігури осей симетрії головні центральні осі збігаються з ними.

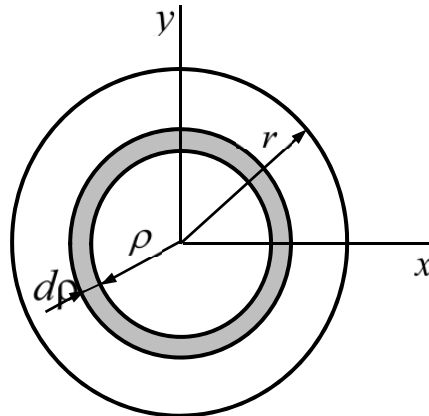


Рис. 2.12. До визначення моменту інерції круга.

Визначимо моменти інерції круглого перерізу (рис. 2.12). Елементарна площадка кругу у полярних координатах дорівнює $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тоді полярний момент інерції круга визначається:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.50)$$

Осьові моменти інерції:

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (2.51)$$

Для інших фігур та профілів формули для визначення моментів інерції або їх числове значення подані у довідниках.

Питання для самоконтролю

1. Який вид деформації називається крученням?
2. Що таке крутний момент?
3. Що називається повним і відносним кутом закручування брусу?
4. Які напруження виникають у поперечному перерізі брусу круглого перерізу при крученні і як вони напрямлені?
5. У яких точках поперечного перерізу виникають максимальні напруження?
6. Сформулюйте залежність між повним кутом закручування і моментом, що діє на брус.
7. Сформулюйте умови міцності і жорсткості при крученні.

2.1.6. Згин. Нормальні та дотичні напруження при згині

Згин – це вид навантаження (деформування) брусу, при якому у його поперечному перерізі діє внутрішній згинальний момент M_z , внаслідок чого вісь брусу викривляється. Брус, що працює на згин, називається балкою.

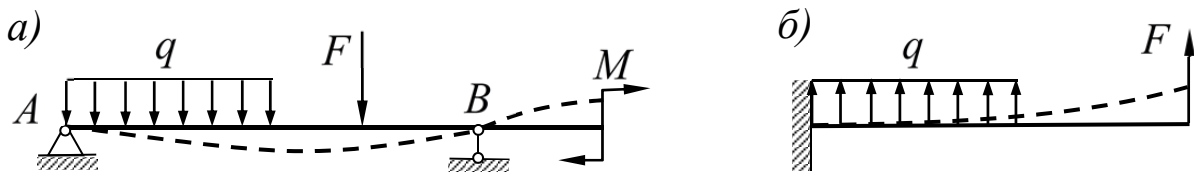


Рис. 2.13 – Приклади розрахункових схем балок при згині

Згин може виникати під дією зовнішніх поперечних сил (зосереджених або розподілених по довжині брусу) та моментів пар сил (рис. 2.13).

Розрізняють:

- чистий згин ($M_z = const \neq 0, Q_y = 0$);
- поперечний згин ($M_z \neq 0, Q_y \neq 0$).

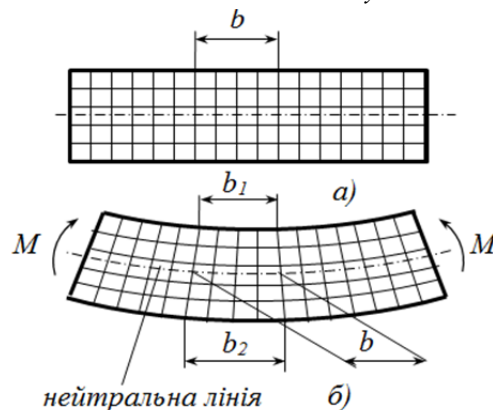


Рис. 2.14. Деформація балки при чистому згині.

При чистому згині поперечні перерізи залишаються плоскими, повертаються, але залишаються нормальними до зігнутої вісі балки. Довжина волокна, що лежить у нейтральному шарі при згинанні не змінюється (рис. 2.14), а волокна, що лежать вище стискаються ($b_1 < b$), ті що нижче розтягуються ($b_2 > b$).



Якщо площина дії згинального моменту (силова площина) проходить через одну з головних центральних осей поперечного перерізу балки, згин називається плоским прямим. При цьому викривлена вісь балки буде плоскою кривою, яка розташована у силовій площині.

Якщо навантаження не лежать в одній силовій площині, то і викривлена вісь бруса буде просторовою кривою. У такому випадку маємо складний просторовий згин. Таку схему навантаження можна розглядати як суперпозицію двох плоских прямих згинів, для чого усі навантаження треба розкласти на складові за головними осями інерції перерізу.

Розрахунки на міцність та жорсткість при згині починаються з того, що для заданої розрахункової схеми складають рівняння рівноваги та визначають опорні реакції. Потім застосовують метод перерізів. Змінюючи поточну координату x вдовж вісі балки, аналізують закономірності, за якими змінюються внутрішні силові фактори – поперечна сила Q_y та згинальний момент M_z , та будують їх епюри – графіки Q_y та M_z .

З рівнянь рівноваги будь-якої частини балки, відокремленої уявним перерізом, витікають наступні практичні правила підрахунку Q_y та M_z .

Внутрішня поперечна сила Q_y чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відокремлену частину балки.

Внутрішній згинальний момент M_z чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів від навантажень, прикладених до відокремленої частини балки, відносно головної центральної вісі Q_y перерізу.

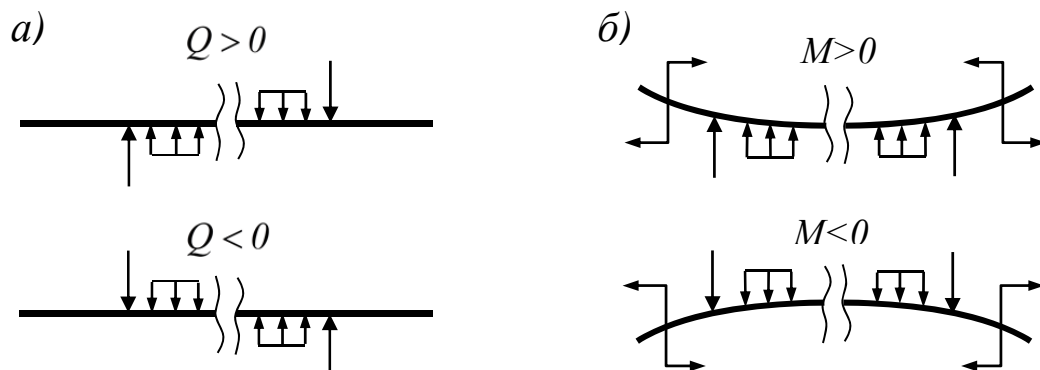


Рис. 2.15 – Правила знаків для Q_y і M_z .

Правило знаків для Q_y : при підсумовуванні сила враховується як додатна, якщо вона намагається повернути відокремлену частину балки відносно перерізу за стрілкою годинника (рис. 2.15,а).

Правило знаків для M_z : момент враховується як додатний від тих навантажень, які згинають балку опуклістю вниз (рис. 2.15,б).

Розглянемо два елементарних характерних випадки навантаження балки. Перший випадок навантаження балки зосередженою силою (рис. 2.16).

Побудова епюр починається з визначення реакції опор. Для нашого випадку $R_A = R_B = F/2$. За методом перерізів, обчислюємо значення поперечної сили у перерізі на ділянці Ac , наприклад на відстані x_1 . Складемо схему діючих зовнішніх та внутрішніх сил для цієї ділянки (рис. 2.16). Зі схеми поперечна сила визначається:

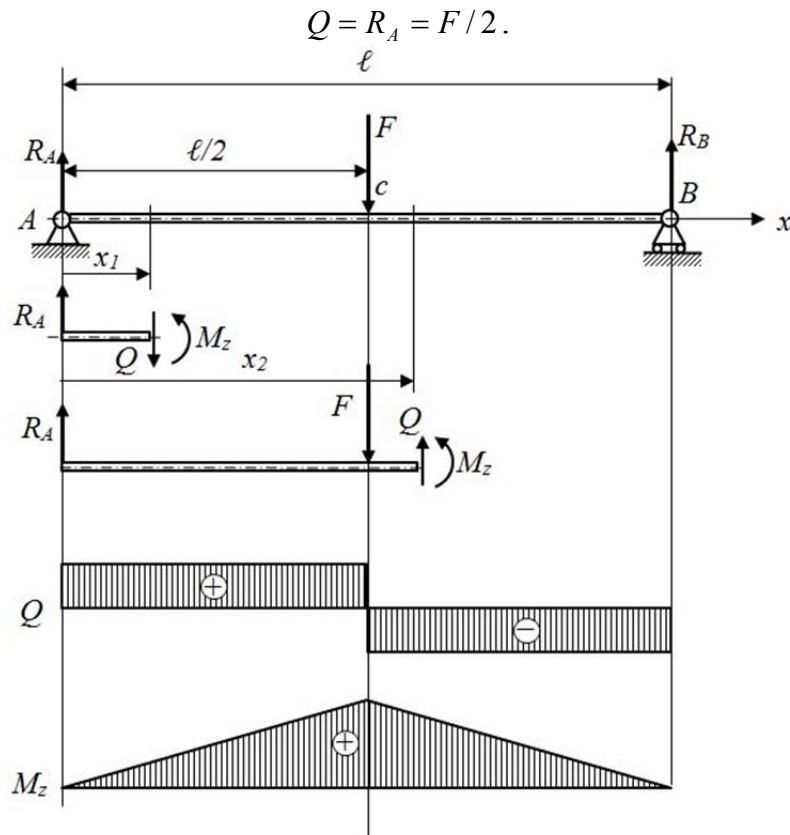


Рис. 2.16.

Так як величина поперечної сили не залежить від x , то вона стала на ділянці Ac і складає $F/2$.

Для ділянки cB переріз на відстані x_2 :

$$Q = R_A - F = F/2 - F = -F/2.$$

Величина поперечної сили на цій ділянці також стала, але дорівнює $-F/2$. відповідно еюра поперечної сили набуває вигляду, представленого на рисунку.

Для побудови еюри згинаючих моментів складемо рівняння рівноваги зовнішніх моментів сил та внутрішнього моменту опору на ділянках Ac та cB .

Для ділянки Ac , переріз на відстані x_1 :

$$M_z = R_A \cdot x,$$

графіком отриманого рівняння є пряма похила лінія.

Відзначимо, що при $x=0$, $M_z=0$, а при $x=l/2$ значене M_z розраховується таким чином:

$$M_z = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl}{4}.$$

Для ділянки cB , переріз на відстані x_2 :

$$M_z = R_A \cdot x - F(x - \frac{l}{2}).$$

При $x=l$ отримуємо:

$$M_z = \frac{F}{2} \cdot l - F(l - \frac{l}{2}) = 0.$$

Таким чином, еюра набуває вигляду трикутника.

Другий випадок - навантаження балки рівномірно розподіленою силою (рис. 2.17). Для цього випадку реакції опор $R_A=R_B=q\ell/2$.



Складемо схему діючих зовнішніх та внутрішніх сил для ділянки Ac . Зі схеми поперечна сила визначається:

$$Q = R_A - q \cdot x.$$

Отримали рівняння похилої прямої, для якої при $x=0$, $Q=R_A=q\ell/2$, а при $x=\ell/2$:

$$Q = \frac{q\ell}{2} - q \cdot \frac{\ell}{2} = 0.$$

Відмітимо, що рівняння рівноваги не змінюється для ділянки cB . Таким чином для $x=\ell$, отримуємо:

$$Q = R_A - q \cdot x = \frac{q\ell}{2} - q \cdot \ell = -\frac{q\ell}{2}.$$

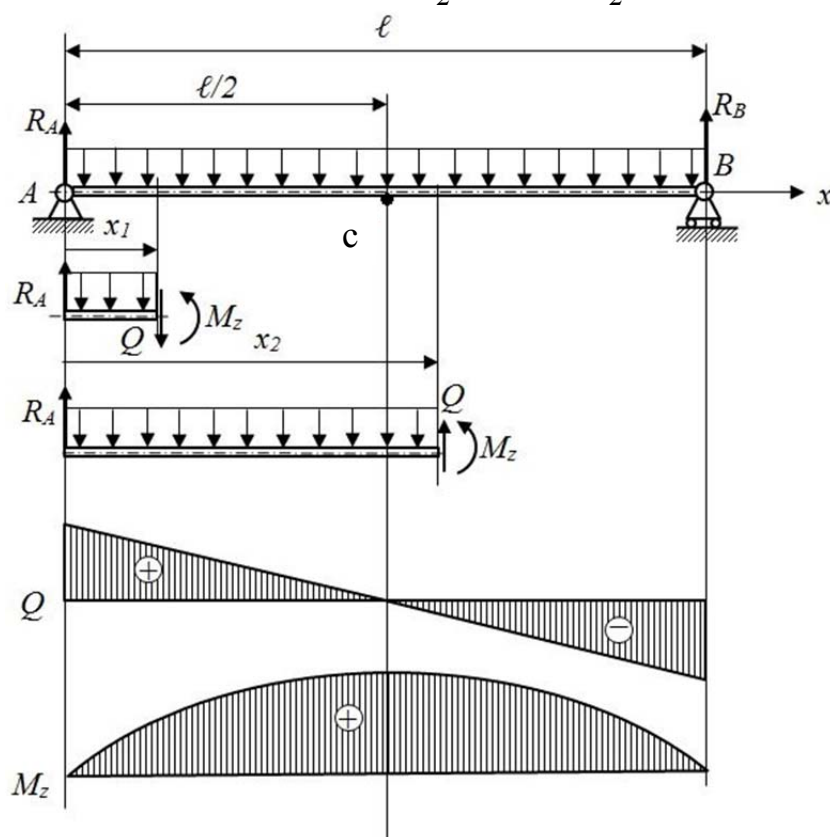


Рис. 2.17.

Для побудови епюри згинаючих моментів складемо рівняння рівноваги зовнішніх моментів сил та внутрішнього моменту опору на ділянках Ac та cB . У нашому випадку рівняння буде мати однаковий вигляд для обох ділянок:

$$M_z = R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2}.$$

Бачимо, що залежність згинаючого моменту відповідає квадратичному рівнянню, графіком якого є парабола. Обчислюємо значення згинаючих моментів для характерних точок:

$$x=0,$$

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q\ell}{2} \cdot 0 - \frac{q \cdot 0^2}{2} = 0;$$

$$x=\ell/2,$$

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{q \cdot \frac{\ell^2}{4}}{2} = \frac{q\ell^2}{8};$$

$$x = \ell$$

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q\ell}{2} \cdot \ell - \frac{q \cdot \ell^2}{2} = 0.$$

Епюра згинаючих моментів має вигляд параболи, розташованої опуклістю вгору, та має екстремум у точці $x = \ell/2$. Відмітимо, що значення поперечної сили у цій точки дорівнює нулю.

Важливу роль у теорії згинання мають диференційні залежності між згинальним моментом, поперечною силою і розподіленням навантаженням, які були встановлені професором Журавським:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad (2.52)$$

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dz} = q, \quad (2.53)$$

Отримані диференціальні залежності використовуються для контролю правильності побудови епюр. З них та з аналізу попередніх прикладів побудови епюр слідують наступні поради у побудові епюр.

1. Якщо на деякій ділянці балки відсутнє розподілене навантаження, то епюра Q_y – пряма, паралельна вісі абсцис, тобто $Q_y = \text{const}$, а епюра моментів - похила пряма.

2. Якщо на деякій ділянці балки є рівномірно розподілене навантаження q , то епюра Q_y – похила пряма, а епюра M_z - парабола.

3. Якщо на деякій ділянці балки:

- $Q_y > 0$, то згинальний момент зростає (зліва направо);
- $Q_y < 0$, то згинальний момент зменшується;
- $Q_y = 0$, то згинальний момент незмінний (чисте згинання).

4. Якщо поперечна сила, змінюючись за лінійним законом, проходить через нульове значення, то в точці, що відповідає цьому значенню, згинальний момент має екстремальне (максимальне чи мінімальне) значення.

5. Під зосередженою силою на епюрі Q створюється стрибок на величину прикладеної сили, а на епюрі M_z - різка зміна кута нахилу суміжних ділянок епюри.

6. Якщо розподілене навантаження напрямлено вниз, то парабола, що являє собою епюру M_z , звернена опуклістю вгору, тобто назустріч навантаженню, і навпаки.

7. Там, де до балки прикладена зосереджена пара сил, на епюрі M_z утворюється стрибок на величину моменту цієї пари. На епюрі Q_y це не відображається.

8. У перерізі на вільному кінці балки згинальний момент дорівнює нулю, якщо там не прикладена зосереджена пара сил.

Аналіз моделі згину балки (рис. 2.14) показує, що у балці внаслідок деформації волокон виникають нормальні напруги. У верхній частини напруги



стиску, у нижній – розтягу. Відмітимо, що у випадку поперечного згину виникає також внутрішня поперечна сила, яка відповідно породжує додаткові дотичні напруги.

Для визначення величини нормальних напружень у поперечному перерізі балки, розглянемо прямолінійну балку, навантажену чистим згинанням. Виділимо елемент балки, обмежений двома нескінченно близькими поперечними перерізами (рис. 2.18).

Позначимо слід нейтрального шару на площині креслення літерами n_1-n_2 , а його радіус кривизни – ρ . Довжина волокна, що лежить у нейтральному шарі, при згинанні не змінюється і дорівнює $\rho d\varphi$.

Визначимо лінію деформації довільного волокна b_1-b_2 , віддаленого на відстані z , від нейтрального шару. Довжина цього волокна (довжина дуги m-m) дорівнює $(\rho + z) d\varphi$.

Абсолютне видовження дуги дорівнює $(\rho + z) d\varphi - \rho d\varphi = z d\varphi$, а відносне видовження ε дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{z d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho}. \quad (2.54)$$

За законом Гука напруження в шарі на відстані z від нейтрального шару:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{z}{\rho}. \quad (2.55)$$

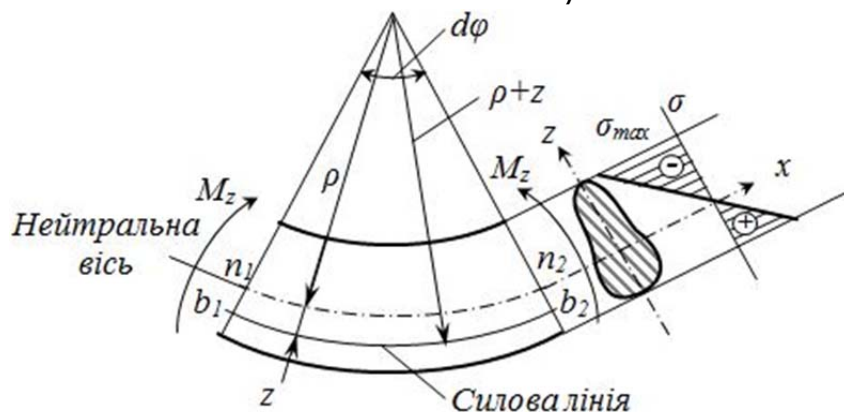


Рис. 2.18. Деформації балки при чистому згинанні.

Аналізуючи формулу (2.55) можна помітити, що нормальне напруження у будь якій точці поперечного перерізу балки прямо пропорційне її відстані z від нейтральної вісі, тобто при $z = 0$ напруги $\sigma = 0$, а при $z = z_{max}$ напруги досягають максимального значення $\sigma = \sigma_{max}$.

Таким чином, нейтральна вісь (рис. 2.18) ділить поперечний переріз бруса на дві частини, в одній з яких (у нашому випадку - у нижній) виникають розтягувальні, а в іншій - стискальні напруження. В точках, що лежать на самій нейтральній вісі, нормальні напруження дорівнюють нулю.

Уточнімо положення нейтральної вісі і силової лінії при згині. Для цього розглянемо поперечний переріз балки, навантаженої чистим згинанням (рис. 2.19.).

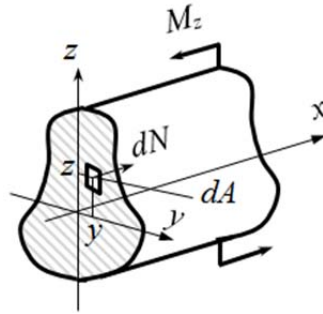


Рис. 2.19. Поперечний переріз балки, навантаженій чистим згинанням.

Виділимо у перерізі елементарну площадку dA , на яку діє елементарна сила $dN = \sigma dA$. Прирівняємо до нуля суму проєкцій усіх сил на осі x , що відповідає нейтральній осі, одержимо:

$$\sum F_{xk} \text{ або } \int_A dN = \int_A \sigma dA = 0 \quad (2.56)$$

З урахуванням формули (2.55) маємо:

$$\frac{E}{\rho} \int_A z dA = 0 \quad (2.57)$$

Оскільки $E/\rho \neq 0$, то 2.57 набуває вигляду:

$$\int_A z dA = 0 \quad (2.58)$$

Останній інтеграл являє собою статичний момент S_y площі поперечного перерізу балки відносно нейтральної вісі. Він дорівнює нулю, це значить, що нейтральна ось при згинанні проходить через центр ваги перерізу.

Прирівняємо до нуля суму моментів усіх сил відносно осі y . З урахуванням формули (2.55) рівність $\sum M_z = 0$ перетворюється до вигляду:

$$\frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0 \quad (2.59)$$

Інтеграл $\int_A yz dA = 0$ являє собою момент інерції перерізу I_{yz} відносно осей y і z . Так як він дорівнює нулю, то вісі y і z мають бути головними осями перерізу і момент M має лежати у площині, що проходить через одну з головних осей. Із цієї умови випливає, що силова лінія і нейтральна вісь (нульова лінія) взаємно перпендикулярні.

Встановимо залежність між згинальним моментом, що діє у перерізі балки, і нормальними напруженнями, які виникають у даному перерізі.

Елементарний момент, що створюється силою dN відносно осі y (див. рис. 2.19.):

$$dM = dN \cdot z = \frac{Ez}{\rho} dA \cdot z, \quad (2.60)$$

а сумарний момент у перерізі:

$$M_z = \int_A \frac{Ez^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA. \quad (2.61)$$



Інтеграл від $z^2 dA$ являє собою момент інерції перерізу відносно нейтральної осі $y - I_y$, тоді:

$$M_z = \frac{E}{\rho} I_y \text{ або } \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_y}. \quad (2.62)$$

Величина $\frac{1}{\rho}$ це кривизна нейтрального шару балки. Формула (2.62) показує, що кривизна нейтрального шару пропорційна згинальному моменту і обернено пропорційна величині EI_y , яка називається жорсткістю балки.

Підставляючи знайдене значення кривизни у вираз (2.55) одержимо:

$$\sigma = E \frac{z}{\rho} = Ez \frac{M_z}{EI_y} = \frac{M_z z}{I_y}. \quad (2.63)$$

Таким чином, нормальні напруження при згинанні дорівнюють:

$$\sigma = \frac{M_z z}{I_y}, \quad (2.64)$$

тобто вони змінюються пропорційно відстані від нейтрального шару.

Максимальні значення нормального напруження виникають при максимальній відстані від нейтральної осі:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z z_{max}}{I_y} = \frac{M_z}{W_y}. \quad (2.65)$$

Відношення $\frac{I_y}{z_{max}} = W_y$ – осьовий момент опору.

Для схеми навантаження, наведеної на рис. 2.19, найбільше розтягувальне напруження на нижніх волокнах:

$$\sigma_{p,max} = \frac{M_z h_p}{I_y} = \frac{M_z}{W_{yp}}, \quad (2.66)$$

а найбільше стискувальне – у верхніх:

$$\sigma_{p,max} = \frac{M_z h_c}{I_y} = \frac{M_z}{W_{yc}}, \quad (2.67)$$

де W_{yp} і W_{yc} – момент опору розтягнутого і стиснутого волокон.

Якщо переріз балки симетричний відносно нейтральної осі (такі перерізи найчастіше використовуються в техніці) і матеріал балки однаково чинить опір розтягу та стиску, то умова міцності балок при згині набуває такий вигляд:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z,max}}{W_y} \leq [\sigma], \quad (2.68)$$

де W_y - осьовий момент опору або момент опору при згинанні.

Момент опору є геометричною характеристикою поперечного перерізу балки, що визначає її міцність при згині.

Значення W_y для найпростіших перерізів:

а) для прямокутника з шириною основи b і висотою h :

$$W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad (2.69)$$

б) для круга діаметром d :

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3, \quad (2.70)$$

в) для кільцевого перерізу з діаметром d , внутрішнім d_0 ($c=d_0/d$)

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32}(1-c^4) \approx 0,1d^3(1-c^4). \quad (2.71)$$

Умова міцності балок при згинанні дозволяє підібрати відповідний переріз балки або визначити допустиме навантаження на балку.

Дотичні напруження при поперечному згинанні. При поперечному згині на відміну від чистого згину, поперечні перерізи бруса не залишаються плоскими. Внаслідок, крім існуючих в них нормальних напружень, виникають дотичні напруження. Але викривлення перерізів настільки мале, що для практичних розрахунків нормальних напружень можна використовувати гіпотезу плоских перерізів. Тоді нормальні напруження при поперечному згинанні можна визначити за формулою (2.55) для чистого згинання.

Для визначення дотичних напруг користуються формулою, отриманою професором Журавським для дотичних напружень у прямокутних перерізах:

$$\tau = \frac{QS_y^*}{bI_y} \quad (2.72)$$

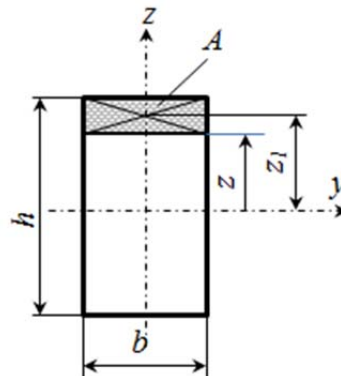


Рис. 2.20. До визначення дотичних напруг при поперечному згині.

Інженерна практика довела, що цю формулу з достатнім ступенем точності можна використовувати і для інших типів перерізів.

Для випадку прямокутного перерізу:

$$S_y^* = Az_1, \quad (2.73)$$

У формулі 2.72 S_y^* - статичний момент відрізаної на висоті z площадки поперечного перерізу A (рис. 2.20).

Тоді після перетворень отримуємо формулу розподілу дотичних напруг у прямокутному перерізі:

$$\tau = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (2.74)$$

Цей вираз вказує на параболічний характер зміни дотичних напружень за висотою перерізу. Неважко помітити, що $\tau = 0$ на верхньому та нижньому шарах балки, тобто у тій зоні, де нормальні напруження σ досягають



максимальних значень (рис. 2.21). Максимальне значення дотичних напруг спостерігається при $z=0$, тобто на нейтральній вісі балки, де нормальні напруги дорівнюють нулю:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \quad (2.75)$$

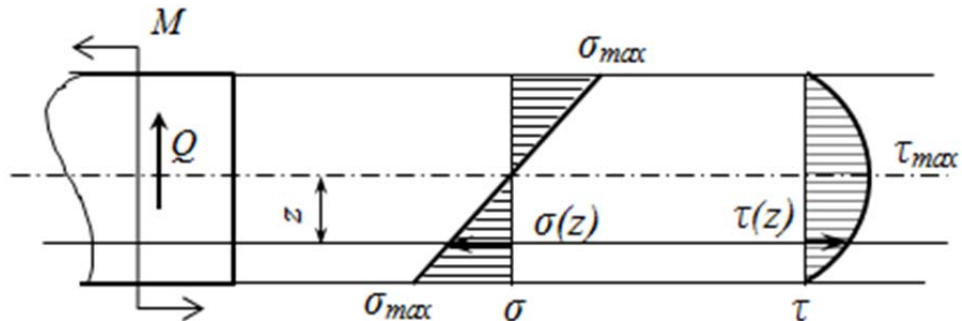


Рис. 2.21. Розподіл нормальних і дотичних напружень при поперечному згинанні балки.

З (2.75) слідує, що максимальне значення τ більше від того, що було б отримане за розрахунками на звичайний зсув в 1,5 рази.

Умова міцності для дотичних напружень:

$$\tau_{max} = \frac{QS_{y,max}^*}{b_{min} I_y} \leq [\tau] \quad (2.76)$$

Для підбирання розмірів перерізу за величиною допустимих дотичних напружень треба було б одночасно визначити три величини, пов'язані між собою – b ; I_y та $S_{y,max}^*$, що є неможливим. Тому на практиці спочатку підбирають розміри перерізу з умови міцності за нормальними напруженнями, а далі перевіряють їх за формулою (2.76). Якщо результати розрахунків задовольняють (2.76), що частіше і буває, розрахунок закінчують. Якщо ні, то збільшують переріз (вибирають більший розмір сортаменту балки) і так до тих пір, доки умова не буде виконана. Зрозуміло, що умова міцності за нормальними напруженнями при цьому буде виконуватися автоматично.

Раціональні форми поперечних перерізів балок. Переріз вважається раціональним, якщо він забезпечує міцність даної балки при мінімальній її вазі. Раніше було вказано, що втрата міцності пов'язана з величиною нормальних напружень σ . Як свідчить епюра σ , матеріал, розташований поблизу нульової лінії, працює дуже мало. Тому, чим більшу частину площі перерізу винесено від нульової лінії на периферію, тим раціональнішим буде переріз.

Наприклад, балка прямокутного перерізу з розмірами сторін a і $2a$, яку встановлено на опори більшою її стороною, має момент опору $W_1=2a^3/6$, а якщо меншою то $W_2=4a^3/6$. Отже у другому випадку нормальні напруження в балці (при однаковому навантаженні) будуть у два рази меншими.

Для кількісної оцінки раціональності перерізу (за витратою матеріалу) використовується безрозмірна величина:

$$w_y = \frac{W_y}{\sqrt{A^3}}, \quad (2.77)$$

яка називається осьовим питомим моментом опору і залежить лише від форми перерізу. Чим більша величина w_y , тим раціональніший переріз.

Найкращим з стандартних профілів балок є двотавр. У ньому найбільш повно реалізована ідея віддалення матеріалу від нульової лінії. Однак він стає нераціональним, якщо його орієнтувати так, щоб нульова лінія співпадала з віссю, відносно якої момент інерції мінімальний

Деформована під дією навантажень ось балки являє собою плавну криву, яка називається пружною лінією. Деформація при згині характеризується прогином y і кутом повороту φ поперечного перерізу.

З математики відомо, що радіус кривизни пружної лінії $y = f(x)$ визначається з формули:

$$\rho = \frac{[1 + (z')^2]^{3/2}}{z''}, \quad (2.79)$$

де $z' = \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \delta$, $z'' = \frac{d^2z}{dx^2}$.

Внаслідок незначних деформацій величиною $(z')^2$ нехтують, тоді:

$$\frac{1}{\rho} = z'' = \frac{M_z}{EI_z}; \text{ або } z''EI_z = M_z. \quad (2.80)$$

Це диференціальне рівняння пружної лінії балки.

Щоб отримати рівняння кутів повороту перерізу необхідно це рівняння проінтегрувати один раз, а прогинів – двічі. Таким чином, прогини балки залежать від геометричної характеристики перерізів балки та розподілу згинаючих моментів вздовж балки, тобто від схеми навантаження.

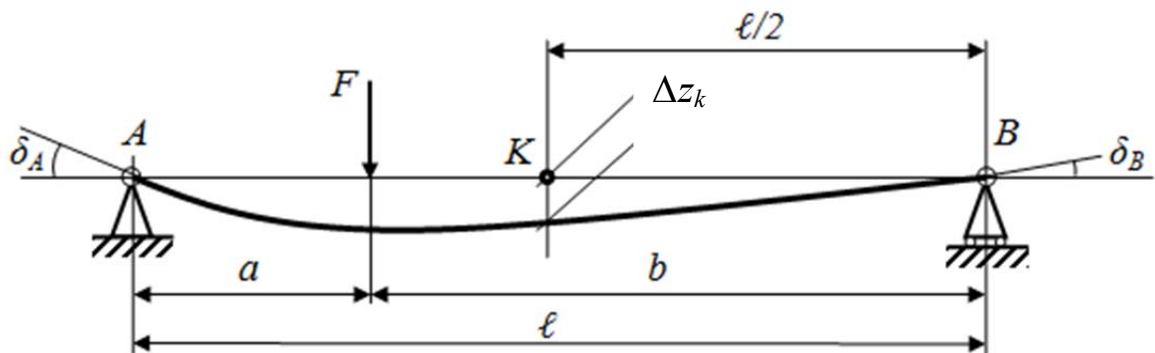


Рис. 2.22.

Для випадків навантаження однією силою рішення мають вигляд:

1) сила розміщена не симетрично (рис. 2.22):

- прогин у точці K :

$$\Delta z_K = \frac{Fa}{48EI_z}(3l^2 - 4a^2), \quad (2.81)$$

- кути повороту опорних перерізів:



$$\delta_A = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI_z \ell}; \quad \delta_B = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI_z \ell}; \quad (2.82)$$

2) при симетричному розміщенню сили (рис. 2.23):

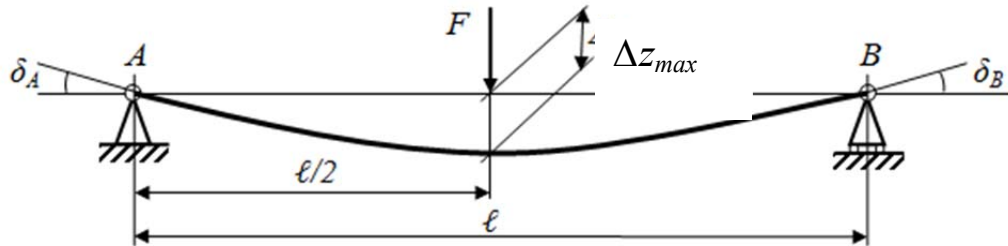


Рис. 2.23.

- максимальний прогин у точці K :

$$\Delta z_{max} = \frac{F\ell^3}{48EI_z}, \quad (2.83)$$

- кути повороту опорних перерізів:

$$\delta_A = \delta_B = \frac{F\ell^2}{16EI_z}. \quad (2.84)$$

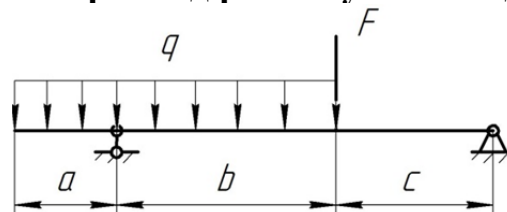
Умови жорсткості балки:

$$\Delta z_{max} \leq [z]; \quad \delta_{max} \leq [\delta] \quad (2.85)$$

де $[z] = (0,001 \dots 0,003)\ell$ - допустимий прогин;

$[\delta] = 0,01 \text{ рад}$ - допустимий кут повороту.

Приклад розв'язування задач



На дерев'яну балку діють рівномірно розподілене навантаження $q=20$ кН/м та зосереджена сила $F=30$ кН. Побудувати епюри Q і M , підібрати круглий та прямокутний ($h=2b$) перерізи балки та вибрати оптимальний з них, якщо розміри балки $a=1$ м, $b=3$ м, $c=2$ м, а допустиме напруження складає $[\sigma]=12$ МПа.

Розв'язування.

Визначаємо опорні реакції з наступних рівнянь (рис. 2.24):

$$\Sigma M_A = 0; \quad -q \cdot 4 \cdot 1 - F \cdot 3 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$\text{звідки } R_B = 0,2(4q + 3F); \quad R_B = 0,2(4 \cdot 20 + 3 \cdot 30) = 34 \text{ кН};$$

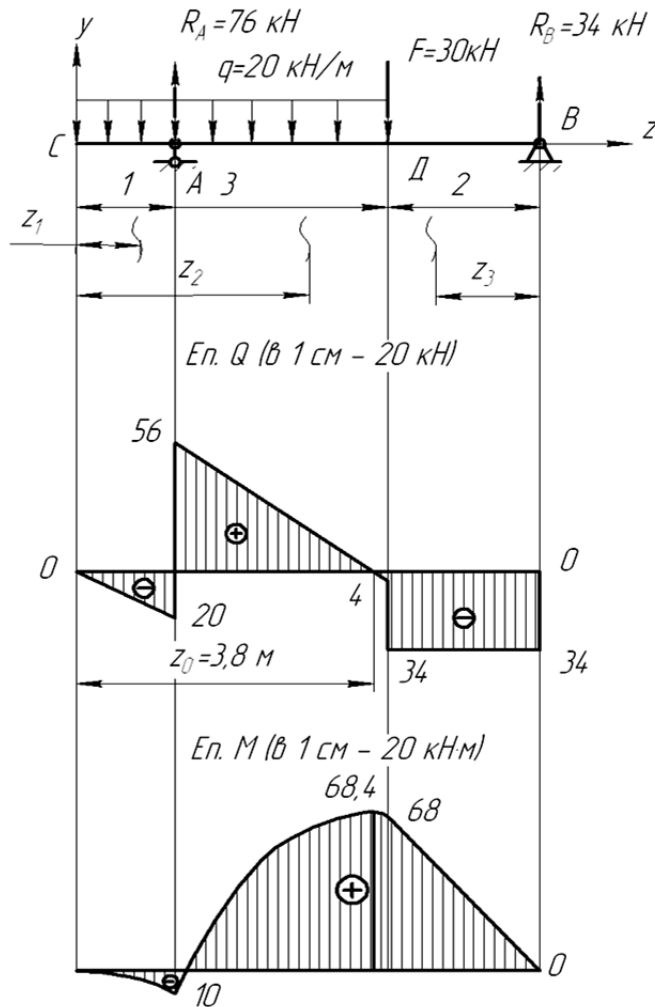


Рис. 2.24.

$$\Sigma M_B = 0; \quad -R_A \cdot 5 + q \cdot 4 \cdot 4 + F \cdot 2 = 0,$$

звідки $R_A = 0,2(16q + 2F)$; $R_A = 0,2(16 \cdot 20 + 2 \cdot 30) = 76$ кН.

Виконаємо перевірку правильності значень опорних реакцій з умови:

$$\Sigma z_i = 0; \quad R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 76 + 34 - 20 \cdot 4 - 30 = 0.$$

Для побудови епюр Q і M поділяємо балку на три ділянки CA , AD та BD і складаємо функціональні залежності для кожної з них.

Ділянка CA має межі $0 \leq x_1 \leq 1$ (м). Тоді:

$Q(x_1) = -q \cdot x_1$. Знак „-“, оскільки розподілене навантаження намагається обернути балку проти руху годинникової стрілки.

$M(x_1) = -\frac{qx_1^2}{2}$. Знак „-“, оскільки момент згинає балку так, що верхня частина поперечного перерізу балки розтягнута, а нижня – стиснута.

При $x_1 = 0$ $Q_C = 0$ і $M_C = 0$.

$$x_1 = 1 \text{ м} \quad Q_A = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН}; \quad M_A = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналогічно, для ділянки AD : $1 \leq x_2 \leq 4$ (м). $Q(x_2) = -q \cdot x_2 + R_A$;

$$M(x_2) = -\frac{qx_2^2}{2} + R_A(x_2 - 1).$$



$$\text{При } x_2 = 1 \text{ м} \quad Q_A = -20 \cdot 1 + 76 = 56 \text{ кН};$$

$$M_A = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} + 76(1-1) = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x_2 = 4 \text{ м} \quad Q_A = -20 \cdot 4 + 76 = -4 \text{ кН};$$

$$M_A = -\frac{20 \cdot 4^2}{2} + 76(4-1) = -68 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оскільки $Q = \frac{dM}{dz}$, максимальне значення моменту визначаємо з умови $Q(x_2) = 0$. Тоді

$$x_2 = x_0 = \frac{R_A}{q}; \quad x_0 = \frac{76}{20} = 3,8 \text{ м}, \text{ тоді}$$

$$M_{\max} = M(x_0) = -\frac{20 \cdot 3,8^2}{2} + 76(3,8-1) = 68,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перерізи балки добираємо з умови міцності при згинанні:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma],$$

де M_{\max} – максимальний за модулем момент, який діє на балку;

W_y – осьовий момент опору, який для круглого перерізу складає:

$$W_{y_1} = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ звідки } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\max}}{\pi [\sigma]}} \quad \text{і} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 68,4 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 12}} = 0,387 \text{ м}.$$

Попередньо приймаємо $d = 39$ см. Тоді площа круглого поперечного перерізу $A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$ і $A_1 = \frac{3,14 \cdot 39^2}{4} = 1194,6 \text{ см}^2$.

Аналогічно, для прямокутного ($h = 2b$) перерізу

$$W_{y_2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 \quad \text{і} \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{1,5 M_{\max}}{[\sigma]}}; \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot 68,4 \cdot 10^{-3}}{12}} = 0,204 \text{ м}.$$

Приймаємо $b = 21$ см. Тоді $h = 42$ см і площа прямокутного перерізу складає $A_2 = bh$; $A_2 = 21 \cdot 42 = 882 \text{ см}^2$.

Порівнюючи A_1 і A_2 , маємо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1194,6}{882} = 1,354$. Це означає, що з двох

перерізів оптимальним є прямокутний, який за площею менший від круглого на 35,4 %.

Виконаємо перевірку міцності для обох перерізів:

$$- \text{ для круглого } \sigma_{\max_1} = \frac{M_{\max}}{W_{y_1}} = \frac{32 M_{\max}}{\pi d^3} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max_1} = \frac{32 \cdot 68,4 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,39^3} = 11,75 \text{ МПа} < [\sigma] = 12 \text{ МПа};$$

$$- \text{ прямокутного } \sigma_{\max_2} = \frac{M_{\max}}{W_{y_2}} = \frac{6 M_{\max}}{bh^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max_2} = \frac{6 \cdot 68,4 \cdot 10^{-3}}{0,21 \cdot 0,42^2} = 11,08 \text{ МПа} < [\sigma] = 12 \text{ МПа}.$$

Оскільки в обох випадках умова міцності виконується, остаточно приймаємо дерев'яну балку прямокутного перерізу з розмірами сторін 21×42 см.

Питання для самоконтролю

1. Що називається чистим і поперечним згинанням?
2. Які типи опор використовуються для закріплення балок на основі?
3. Як обчислюється поперечна сила і згинальний момент у перерізі балки при згинанні?
4. У якому порядку будуються епюри Q і M ?
5. Чому дорівнює кривизна вісі балки при чистому згинанні?
6. За якою формулою визначають нормальні напруження у поперечному перерізі балки при чистому згинанні?
7. Сформулюйте умову міцності балки при згинанні.
8. Що називається моментом опору при згині і яка його розмірність?
9. Які переміщення зазнають поперечні перерізи балки при згині?
10. Запишіть основне диференціальне рівняння пружної лінії балки.
11. Сформулюйте умови жорсткості балки при згинанні.

2.1.7. Складні види деформацій

У попередніх розділах вивчалися прості види деформації: розтягання, стискання, зсув, кручення і пряме згинання. На практиці часто зустрічаються більш складні випадки навантаження елементів конструкцій (рис. 2.25).

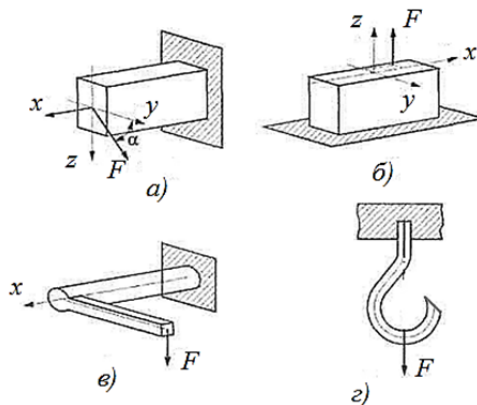


Рис. 2.25. Складні випадки навантаження елементів конструкцій:
 а – косий згин; б – позацентровий розтяг-стиск; в – згин з крученням; г – згин кривого бруса з розтягом.

У цьому випадку у поперечних перерізах одночасно діють декілька внутрішніх силових факторів. Такі випадки прийнято називати складним опором.

Для дослідження напруженого стану у загальному випадку біля довільної точки тіла звичайно виділяють елемент у вигляді нескінченно малого паралелепіпеду.



Повні напруження на його гранях можна розкласти на нормальні $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ і дотичні складові $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ (рис. 2.26,а).

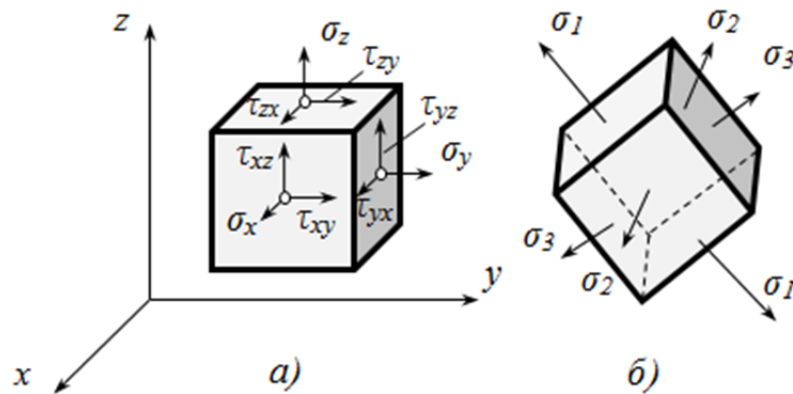


Рис. 2.26. Компоненти напруження у точці тіла.

Якщо орієнтацію виділеного елемента змінити, то діючі напруження також будуть змінюватися. При цьому можна знайти таке положення елементарного паралелепіпеда, при якому на його гранях будуть відсутні дотичні напруження (рис.2.26,б). Грані елемента, на яких дотичні напруження не діють, називаються головними площадками, а нормальні напруження на них – головними напруженнями.

Головні напруження прийнято позначати σ_1, σ_2 і σ_3 (найбільше з них - σ_1 , найменше - σ_3).

У залежності від величини головних напружень розрізняють такі види напруженого стану в точці: лінійне або одновісне (рис. 2.27,а), у якому лише одне з головних напружень (будь-яке з трьох) не дорівнює нулю, а два інших відсутні; плоске або двовісне, у якому два головних напруження відмінні від нуля, а третє відсутнє (рис.2.27,б); об'ємне або тривісне, у якому всі три головні напруження відмінні від нуля (рис.2.7,в)

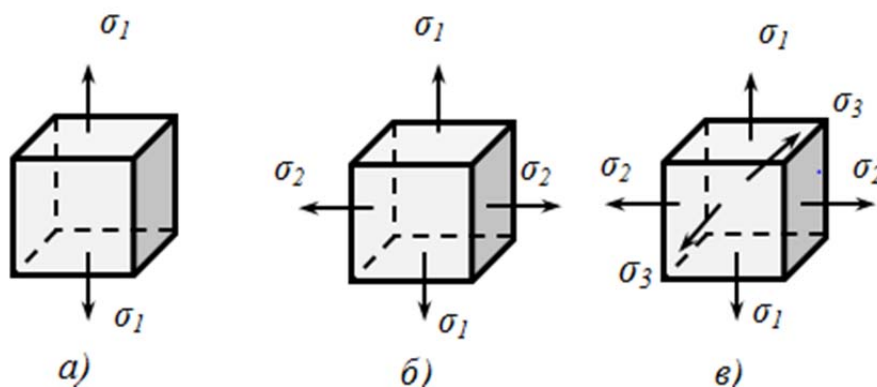


Рис .2.27. Види напруженого стану в точці тіла.

Встановимо залежності між головними напруженнями і деформаціями в умовах об'ємного напруженого стану. Розглянемо поблизу довільної точки тіла нескінченно малий елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b, c , по гранях якого діють головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис.2.28).

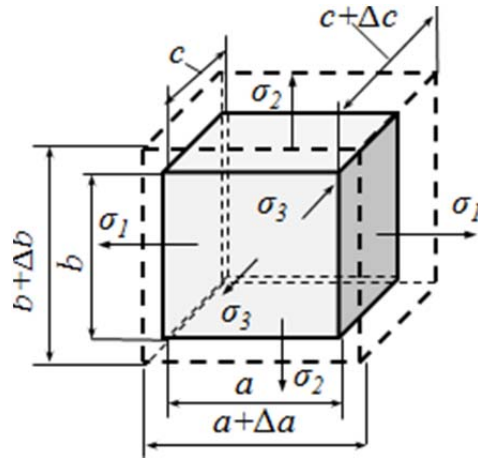


Рис. 2. 28. Елементарний паралелепіпед до і після деформації.

В результаті деформації довжина ребер зміниться і стане рівною $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$. Відносні подовження ε_1 , ε_2 і ε_3 у напрямках дії головних напружень називають головними подовженнями:

$$\varepsilon_1 = \Delta a/a; \quad \varepsilon_2 = \Delta b/b; \quad \varepsilon_3 = \Delta c/c. \quad (2.86)$$

Кожне із головних подовжень складається з трьох доданків, наприклад:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''', \quad (2.87)$$

де ε_1' - відносне подовження у напрямку σ_1 від дії лише σ_1 (якби $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$); за законом Гука $\varepsilon_1' = \sigma_1/E$;

ε_1'' - відносне зменшення у напрямку σ_1 від дії лише σ_2 (якби $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$); з урахуванням формул (2.8) і (2.9):

$$\varepsilon_1'' = -\mu\sigma_2/E, \quad (2.88)$$

ε_1''' - відносне зменшення у напрямку σ_1 від дії тільки σ_3 (якби $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$\varepsilon_1''' = -\mu\sigma_3/E. \quad (2.89)$$

Тоді:

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E - \mu(\sigma_2/E) - \mu(\sigma_3/E) = 1/E[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (2.90)$$

Аналогічні вирази можна одержати і для головних подовжень ε_2 і ε_3

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1/E[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = 1/E[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 = 1/E[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases} \quad (2.91)$$

Система рівнянь (2.91) є математичним виразом узагальненого закону Гука.

Для розрахунку на міцність при складному напруженому стані вводять поняття еквівалентного напруження $\sigma_{екв}$. Еквівалентне напруження $\sigma_{екв}$ – це таке напруження, яке необхідно створити у розглядуваній точці елемента, щоб його напружений стан був рівнонебезпечний із заданим. При цьому міцність елемента конструкції вважають забезпеченою, якщо еквівалентне напруження не перевищує допустимого.

Протягом історії розвитку всієї науки про тверде тіло, що деформується, вчені висунули ряд гіпотез, у яких вважали, що $\sigma_{екв}$ залежить від того чи іншого головного напруження. Ці гіпотези прийнято називати гіпотезами (теоріями) міцності.



1. *Гіпотеза найбільших нормальних напружень*. Згідно цієї теорії, що висунута Галілеєм (XVII ст.), переважний вплив на міцність має величина найбільшого нормального напруження. Умова міцності при складному напруженому стані має вигляд:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 \leq [\sigma], \quad (2.92)$$

де σ_1 - фактичне значення найбільшого головного напруження, що виникає у небезпечній точці деталі;

$[\sigma]$ - допустиме значення нормального напруження, що відповідає одноосному розтягу або стиску.

Таким чином, перша гіпотеза міцності з трьох головних напружень враховує лише одне – найбільше, вважаючи що два інших не впливають на міцність.

Дослідна перевірка показала, що ця гіпотеза дає задовільні результати лише для досить крихких матеріалів (скло, бетон, цегла, і та ін.).

2. *Гіпотеза найбільших лінійних деформацій*. Згідно цієї теорії міцності, запропонованої Маріоттом (XVII ст.), порушення міцності у загальному випадку напруженого стану настає лише, коли найбільша лінійна деформація ε_{max} досягає небезпечного значення. Умова міцності у даному випадку має вигляд:

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon], \quad (2.93)$$

де $[\varepsilon]$ - допустима деформація для розтягу або стиску.

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразимо умову міцності (2.94) у напруженнях:

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E} \quad \text{або} \quad \sigma_{екв} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma], \quad (2.95)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження для розтягу – стиску.

Дослідна перевірка цієї гіпотези показала, що хоч вона і враховує три головні напруження, задовільні результати вона дає лише для крихких матеріалів (наприклад легованого чавуну, високоміцних сталей після низького відпускання і т. ін.)

3. *Гіпотеза найбільших дотичних напружень*. Згідно цієї теорії міцності запропонованої Кулоном (XVIII ст.) у якості критерію міцності приймається величина найбільшого дотичного напруження:

$$\tau_{max} \leq [\tau]. \quad (2.96)$$

Для об'ємного напруженого стану:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.97)$$

Допустиме дотичне напруження $[\tau]$ при одновісному напруженому стані пов'язане з допустимим нормальним напруженням $[\sigma]$ співвідношенням.

$$[\tau] = [\sigma]/2. \quad (2.98)$$

Таким чином, умова міцності виражена у нормальних напруженнях має вигляд:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.99)$$

Для плоского напруженого стану:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.100)$$

Недоліком цієї гіпотези є те, що вона не враховує впливу головного напруження σ_2 на міцність матеріалу.

Третя теорія міцності добре підтверджується дослідами для пластичних матеріалів, які однаково опираються розтягання і стискання. Для крихких матеріалів вона не застосовується.

4. *Енергетична теорія формозміни.* Згідно цієї теорії висунутої Грубером (1904р.), небезпечний стан настає тоді, коли питома потенціальна енергія формозміни досягне свого граничного значення.

Умова міцності у даному випадку має вигляд:

$$u_\phi \leq [u_\phi]. \quad (2.101)$$

Питома потенціальна енергія формозміни u_ϕ при складному напруженому стані:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (2.102)$$

Допустима величина енергії формозміни:

$$[u_\phi] = \frac{1+\mu}{6E} 2[\sigma]^2. \quad (2.103)$$

Підставляючи вирази (2.102) і (2.103.) у формулу (2.101), одержимо умови міцності у нормальних напруженнях:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (2.104)$$

Для плоского напруженого стану:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.105)$$

Досліди добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів, що однаково працюють на розтягання і стискання. Для крихких матеріалів результати незадовільні.

5. *Гіпотеза міцності Мора.* Розглянуті вище гіпотези міцності дають задовільні результати або лише для крихкого руйнування (перша і друга теорії), або лише для пластичних матеріалів (третья і четверта). Крім того вони не враховують різної міцності матеріалів на розтяг і стиск.

Згідно теорії, запропонованої Мором (початок ХХ ст.) міцність матеріалів залежить головним чином від величини і знаку найбільшого σ_1 і найменшого σ_3 із головних напружень. Напруження σ_2 на міцність матеріалу впливає незначно і ним можна знехтувати.

Умова міцності за теорією Мора має вигляд:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - k \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (2.106)$$

де k – коефіцієнт, що враховує різну здатність матеріалу чинити опір розтягу і стиску.

Для пластичних матеріалів:

$$k = \frac{\sigma_{mp}}{\sigma_{mc}}, \quad (2.107)$$

де σ_{mp} і σ_{mc} - границі текучості матеріалу при розтягу і стиску.

Для крихких матеріалів:



$$k = \frac{\sigma_{ep}}{\sigma_{ec}}, \quad (2.108)$$

де σ_{ep} і σ_{ec} - границі міцності матеріалу при розтягу і стиску.

Таким чином, теорія міцності Мора може бути придатна як для крихких, так і для пластичних матеріалів. Але для більшості пластичних матеріалів $\sigma_{mp} = \sigma_{mc}$, тобто формула (2.106) перетворюється на формулу (2.99) (третя теорія міцності) яка теж не враховує σ_2 .

6. *Єдина гіпотеза міцності*. Існує об'єднана теорія гіпотез міцності, яка пояснює механізм руйнування матеріалу як в результаті розриву так і в результаті зрізу і тому може використовуватися для будь-якого виду напруженого стану. Ця гіпотеза об'єднує другу і третю теорію міцності і говорить про те, що допустимий напружений стан має одночасно задовольняти дві умови міцності:

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon] \quad \text{та} \quad \tau_{max} \leq [\tau]. \quad (2.109)$$

При цьому $[\varepsilon]$ встановлюється із дослідів на одновісний розтяг (розрив), а $[\tau]$ із дослідів, при яких руйнування матеріалу викликається зрізом.

Для пластичних матеріалів умови міцності можна навести у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) &\leq [\sigma], \\ \sigma_1 - \sigma_3 &\leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Для крихких матеріалів

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) &\leq [\sigma_p], \\ \sigma_1 - \sigma_3 &\leq [\sigma_c], \end{aligned} \quad (2.111)$$

де $[\sigma_p]$ і $[\sigma_c]$ - допустимі напруження на розтяг і стиск крихких матеріалів.

Ця теорія усуває недоліки, які мають місце у інших наведених теоріях.

Більшість задач на складний опір розв'язується за таким алгоритмом:

1. Усі задані навантаження проєктуються на дві головні площини інерції.
2. У кожній площині будуються епюри внутрішніх силових факторів, співставлення яких дозволяє встановити положення небезпечного перерізу.
3. У небезпечному перерізі обчислюються найбільші нормальні і дотичні напруження і встановлюється положення найбільш напружених точок при одночасній дії усіх внутрішніх силових факторів.
4. Складається умова міцності для небезпечної точки.
5. Обчислюється переміщення окремо від кожного силового фактору, а потім визначаються сумарні переміщення (складаються векторно).

Розглянемо деформацію згинання з крученням. Цей випадок зустрічається дуже часто. Характерним прикладом таких деталей є вали різних машин.

Визначимо умови міцності для валу круглого перерізу, що навантажений поперечною силою F і крутним моментом T (рис.2.29). При згинанні у поперечних перерізах брусу виникають, як відомо, нормальні напруження, що досягають найбільшої величини на крайніх волокнах брусу $\sigma = M_z/W_y$ і дотичні напруження, що досягають найбільшого значення біля нейтрального шару і визначаються за формулою Журавського.

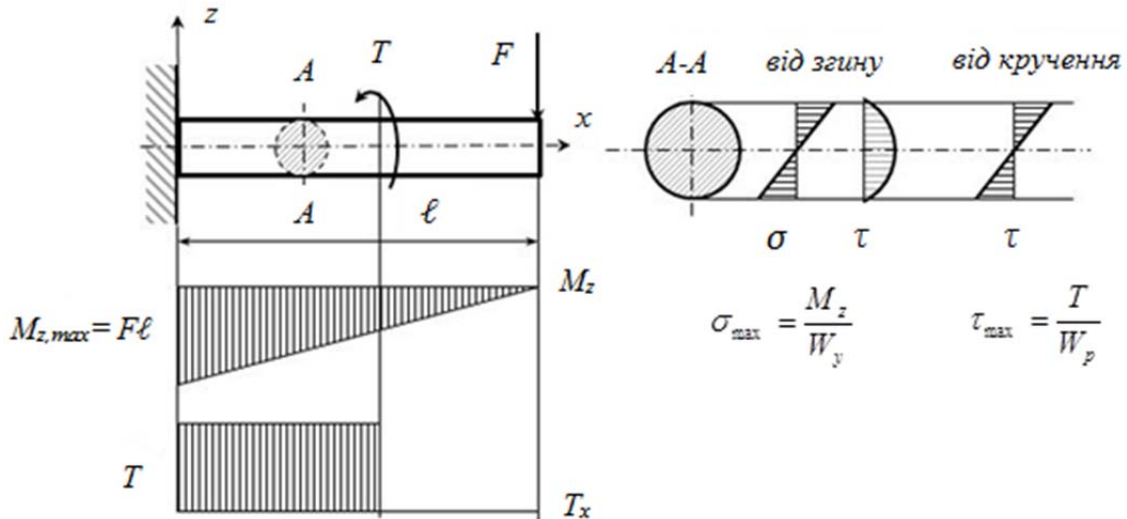


Рис. 2.29. Епюри для бруса круглого перерізу, який навантажений згинанням з крученням.

Для круглого перерізу величина їх незначна порівняно з дотичними напруженнями від кручення і ними можна знехтувати.

Від кручення у поперечних перерізах виникають дотичні напруження, що досягають найбільшого значення на крайніх волокнах (рис. 2.29):

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{T_x}{2W_y}, \quad (2.112)$$

де W_p і W_y – полярний і осьовий моменти опору перерізу відповідно.

Епюри крутних T_x і згинальних M_z моментів (рис. 2.29) показують, що небезпечний переріз розміщений у защемленні бруса. Найбільш небезпечною є точка С. Тут напружений стан двовісний і головні напруження визначаються за формулою:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (2.113)$$

Для перевірки міцності використовуємо одну з теорій міцності для пластичних матеріалів, наприклад, четверту. За четвертою гіпотезою умова міцності для випадку плоского напруженого стану має вигляд:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (2.114)$$

Підставляючи у даний вираз значення σ_1 і σ_2 , одержимо:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.115)$$

Так як $\sigma = \frac{M_z}{W_y}$, а $\tau = \frac{M_z}{2W_y}$, отримуємо:

$$\sigma_{екв} = \frac{\sqrt{M_z^2 + 0,75T_x^2}}{W_y}, \quad (2.116)$$

звідси для підбору перерізу



$$W_{x,min} = \frac{\sqrt{M_z^2 + 0,75T_x^2}}{[\sigma]}. \quad (2.117)$$

Еквівалентне напруження при розрахунку за гіпотезою максимальних дотичних напружень:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{T_x}{2W_y}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_z^2 + T_x^2}{W_y^2}} = \frac{M_{екв}}{W_y}, \quad (2.118)$$

де $M_{екв} = \sqrt{M_z^2 + T_x^2}$.

Умова міцності

$$\sigma_{екв} = \frac{M_{екв}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (2.119)$$

У практичних розрахунках величину перерізу визначають за обома методиками та обирають найбільше значення.

Приклад розв'язування задач

Суцільний сталевий вал круглого поперечного перерізу навантажений в небезпечному перерізі згинальним $M_z = 12$ кН·м і крутним $T = 15$ кН·м моментами. Визначити діаметр вала з умови міцності за третьою та четвертою теоріями міцності, якщо допустиме напруження складає 110 МПа.

Розв'язування. За умовою міцності: $\sigma_{екв} = \frac{M_{екв}}{W_y} \leq [\sigma],$

де $\sigma_{екв}$ – еквівалентне напруження;

$M_{екв}$ – еквівалентний момент, який включає у себе згинальний M_z і крутний T_x моменти;

$W_y = \frac{\pi d^3}{32}$ – осьовий момент опору.

Після перетворень отримує: $d \geq 2\sqrt[3]{\frac{4M_{екв}}{\pi[\sigma]}}.$

За третьою теорією міцності еквівалентний момент дорівнює:

$$M_{екв III} = \sqrt{M_z^2 + T_x^2};$$

за четвертою –

$$M_{екв IV} = \sqrt{M_z^2 + 0,75T_x^2}.$$

$$M_{екв III} = \sqrt{12^2 + 15^2} = 19,21 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M_{екв IV} = \sqrt{12^2 + 0,75 \cdot 15^2} = 17,68 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Таким чином:

$$d_{III} \geq 2\sqrt[3]{\frac{4 \cdot 19,21 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 110}} = 0,1212 \text{ м},$$

$$d_{IV} \geq 2\sqrt[3]{\frac{4 \cdot 17,68 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 110}} = 0,1179 \text{ м}.$$

Остаточно приймаємо діаметр вала $d_{III} = 125$ мм.

Питання самоконтролю

1. *Що таке складний опір елементів конструкцій?*
2. *Що таке головні напруження і головні площадки? Чому дорівнюють дотичні напруження на головних площадках?*
3. *Який напружений стан називається одновісним, плоским і об'ємним?*
4. *Чому дорівнює сума нормальних напружень на будь-яких двох взаємно перпендикулярних площадках при плоскому напруженому стані?*
5. *Запишіть формули, що виражають узагальнений закон Гука.*
6. *У чому полягає сутність першої гіпотези міцності. Для яких матеріалів вона придатна?*
7. *У чому сутність другої гіпотези міцності?*
8. *Сформулюйте умову міцності за третьою гіпотезою.*
9. *У чому сутність четвертої гіпотези міцності? Вкажіть область використання цієї теорії.*
10. *У чому сутність міцності Мора? Вкажіть область її застосування.*
11. *Сформулюйте умови міцності за єдиною гіпотезою міцності. Які недоліки інших теорій усуває дана гіпотеза?*
12. *Які напруження виникають у поперечному перерізі бруса при згинанні з крученням?*
13. *Як визначається величина еквівалентних напружень за четвертою гіпотезою міцності при згині з крученням бруса круглого перерізу?*

2.2. Деталі машин

У розділі «Деталі машин» вивчається будова машин загального призначення, типові деталі та вузли машин, їх кінематичні розрахунки, основи розрахунків на міцність і жорсткість, методи конструювання, раціональний вибір матеріалів і способи з'єднання деталей.

Деталі машин повинні забезпечувати вимоги до технічних засобів, у конструкції яких вони використовуються. До основних вимог належать: працездатність, надійність, технологічність, економічність, а також естетичність і екологічність.

Працездатність – це поняття, що визначає такий стан машини або довільної її складальної одиниці чи деталі, при якому вона здатна виконувати задані функції з параметрами щодо вимог технічної документації із збереженням міцності, незмінності форми і розмірів, стійкості проти спрацьовування, потрібної жорсткості, тепло – і вібростійкості. Ці показники працездатності, порушення яких спричинює вихід з ладу машини чи деталі, називають критеріями працездатності.

При усій значущості усіх описаних критеріїв неважко помітити, що міцність є найважливішим критерієм працездатності і надійності. Потрібно забезпечувати такі умови роботи, щоб напруга в матеріалі деталей не перевищувала тих, що допускаються.



Виконання усіх видів розрахунків на міцність для кожної деталі викликає певні складнощі. Тому на основі досвіду експлуатації подібних виробів та вимог до типових деталей машин визначаються переважні силові, руйнівні фактори. На їх основі виконують попередні розрахунки на міцність, будується форма деталі, а перевірочний розрахунок виконується за напругою, що викликає менш небезпечні дефекти.

Експлуатаційні показники машини оцінюють існуючими зразками подібних машин. При збереженні або зменшенні маси і габаритних розмірів нова машина повинна забезпечувати більш високі продуктивність і ККД, менше споживання енергії, підвищену точність, менші затрати праці на обслуговування і ремонт, тощо. Всього цього можна досягнути вдосконаленням конструктивної схеми машини, раціональним вибором основних параметрів і конструктивних форм, використанням автоматичних систем для регулювання і керування машиною та забезпеченням оптимізації робочого режиму.

Надійність – властивість машини, складальної одиниці або деталі виконувати задані функції, зберігаючи при цьому свої експлуатаційні показники у допустимих межах, протягом наперед заданого проміжку часу. Показником надійності може бути ймовірність безвідказної роботи машини у призначеному інтервалі часу. Чим ближче ймовірність безвідказної роботи до одиниці, тим вище надійність конструкції.

Безпечність в експлуатації характеризує придатність конструкції машини до нормальної експлуатації протягом визначеного технічною документацією терміном служби без аварійних руйнувань, небезпечних для обслуговуючого персоналу, виробничого обладнання, а також інших суміжних об'єктів.

Технологічність і економічність конструкції машини чи деталі – це забезпечення найбільшої простоти конструкції і найменших матеріальних затрат на виготовлення. При розробці проекту потрібно надавати виробу такі конструктивні форми і розміри та використовувати такі матеріали і методи їхньої обробки, які забезпечували б мінімальну масу і витрати матеріалу, найбільш спрощене і економне виробництво з урахуванням загального обсягу виготовлення виробів.

Екологічність машини – здатність виконувати свої функції без шкідливого впливу на навколишнє середовище. Екологічність при проектуванні і конструюванні досягається такими заходами як використанням технологічно чистих джерел енергії, запобіганням шкідливого забруднення виробничих приміщень, нейтралізацією продуктів робочого процесу машини, відповідною герметизацією робочих об'ємів машини, використанням матеріалів для деталей із урахуванням можливості їх утилізації після виходу з ладу, забезпеченням виконання функції машини з низьким рівнем шуму та вібрації.

Слід мати на увазі, що основою розробки різноманітних конструкцій сучасних технічних засобів є використання в основному (за винятком спеціальних засобів) однакових деталей та збірних одиниць – типових, нормальних і стандартних. До них належать роз'ємні та нероз'ємні з'єднання деталей, механічні передачі, вали, опори, ущільнення, муфти та ін. Це

визначило необхідність виділення їх класифікаційних груп, розробки відповідних інженерних методів для їх розрахунків і конструювання.

Визначимо базові поняття у відповідності до діючих стандартів для систематизації навчального матеріалу і щоб уникнути двозначного тлумачення.

Деталь - виріб, виготовлений з однорідного за найменуванням і маркою матеріалу без застосування складальних операцій.

Ланка - група деталей, що утворює рухливу або нерухому один відносно одного механічну систему тел.

Складальна одиниця - виріб, складові частини якого підлягають з'єднанню на підприємстві - виробнику за допомогою складальних операцій.

Вузол - закінчена складальна одиниця, що складається з деталей загального функціонального призначення.

Механізм - система деталей, призначена для передачі і перетворення руху.

Апарат - прилад, технічний пристрій, пристосування, зазвичай деяка автономно-функціональна частина складнішої системи.

Агрегат - уніфікований функціональний вузол, що має повну взаємозамінність.

Машина - система деталей, що здійснює механічний рух для перетворення енергії, матеріалів або інформації з метою полегшення праці. Машина характерна наявністю джерела енергії і вимагає присутності оператора для свого управління. Проникливий німецький економіст К. Маркс помітив, що всяка машина складається з рухового, передатного і виконавчого механізмів.

Автомат - машина, працююча за заданою програмою без оператора.

Робот - машина, що має систему управління, що дозволяє їй самостійно приймати виконавські рішення у заданому діапазоні.

Для орієнтування в нескінченному різноманітті деталі машин поділяють на типові групи за характером їх використання:

- передачі передають рух від джерела до споживача;
- вали і осі несуть на собі деталі передач, що обертаються;
- опори служать для установки валів і осей;
- муфти сполучають між собою вали і передають крутний момент;
- сполучні деталі з'єднують деталі між собою;
- пружні елементи пом'якшують вібрацію і удари, накопичують енергію, забезпечують постійне стискування деталей;
- корпусні деталі утворюють простір для розміщення усіх інших деталей, забезпечують їх захист.

Процес розробки машин має складну, розгалужену неоднозначну структуру і зазвичай називається широким терміном проектування - створення прообразу об'єкту, що представляє у загальних рисах його основні параметри. Під конструюванням деякі автори розуміють увесь процес від ідеї до виготовлення машин, деякі - лише завершальну стадію його підготовки. Але у будь-якому випадку мета і кінцевий результат конструювання - створення



робочої документації, за якою можна без участі розробника виготовляти, експлуатувати, контролювати і ремонтувати виріб.

Тут також вимагається дати базові поняття:

Технічне завдання - документ, що складається спільно замовником і розробником, містить загальне представлення про призначення, технічні характеристики і принципове облаштування майбутнього виробу.

Технічна пропозиція - додаткові або уточнені вимоги до виробу, які не могли бути вказані у технічному завданні.

Творчість - специфічна матеріальна або духовна діяльність, що породжує щось нове або нову комбінацію відомого.

Винахід - нове рішення технічної задачі, що дає позитивний ефект.

Ескізування - процес створення ескізу, попереднього малюнку або нарису, що відтворює задум, і такого, що містить основні контури створюваного об'єкту.

Компонування - розташування основних деталей, вузлів, складальних одиниць майбутнього об'єкту.

Розрахунок - чисельне визначення зусиль, напруги і деформацій у деталях, встановлення умов їх нормальної роботи. Виконується в міру необхідності на кожному етапі конструювання.

Креслення - точне графічне зображення об'єкту, що містить повну інформацію про його форму, розміри і основні технічні умови виготовлення.

Пояснювальна записка - текстовий документ, що містить опис пристрою і принципу дії виробу, а також технічні характеристики, економічне обґрунтування, розрахунки, вказівки з підготовки виробу до експлуатації.

Специфікація - текстовий табличний документ, що визначає склад виробу.

Ескізний проєкт - перший етап проєктування, коли встановлюються принципові конструктивні і схемні рішення, що дають загальні уявлення про пристрій і роботу виробу.

Технічний проєкт - завершальний етап проєктування, коли виявляються остаточні технічні рішення, що дають повне уявлення про виріб.

Робочий проєкт - повний комплект робочої документації (текстової і графічної), у якій міститься повна інформація про конструкцію, виготовлення, експлуатацію і ремонт машини.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає різниця між проєктуванням і конструюванням?
2. Які документи є результатом конструювання?
3. Які основні вимоги до деталей і машин?
4. Які основні критерії якості деталей і машин?
5. Що таке працездатність і які її критерії?
6. Що таке надійність і які її критерії?
7. Що є найголовнішим критерієм працездатності і надійності?
8. У чому полягає загальна умова міцності деталей машин?
9. Чим відрізняються агрегат та апарат?
10. Вкажіть групи деталей машин загального призначення.

2.2.1. Механізми перетворення руху

Носієм руху у машинах є механізми. Більшість механізмів виконують функцію перетворення механічного руху твердих тіл. Механізм – це система твердих тіл, що рухомо з'єднані між собою, яка призначена для перетворення руху одного чи кількох тіл у потрібні рухи інших тіл.

Основними структурними елементами механізму є ланки (тверді тіла) та кінематичні пари (рухомі з'єднання твердих тіл). Тобто будь-який механізм чи машина складаються лише з ланок, які з'єднані між собою кінематичними парами.

Одна деталь або сукупність декількох деталей, які утворюють одну жорстку систему тіл і не мають рухів одне відносно іншого, являють собою ланку.

Ланки розрізняють за конструктивними ознаками (корпус двигуна, колінчастий вал, шатун, поршень, зубчасте колесо і т.п.), але найчастіше – залежно від характеру їхнього відносного руху. Наприклад: кривошип - ланка механізму, яка здійснює повний оберт навколо нерухомої осі; коромисло - ланка, яка здійснює коливальний рух; повзун - ланка, що здійснює поступальний прямолінійний рух; шатун - ланка важільного механізму, що здійснює плоскопаралельний рух; куліса - рухома ланка, яка є напрямною повзуна.

У кожному механізмі є одна нерухома ланка (або ланка, що приймається за нерухома) та одна чи декілька рухомих ланок. Нерухома ланку механізму називають стояком. Наприклад, у механізмі двигуна внутрішнього згорання – блок двигуна, картер, головка циліндрів, циліндри, опори колінчастого валу та інші вузли утворюють в сукупності одну нерухома ланку – стояк. Стояк на схемі механізму позначають штриховкою.

У будь-якому механізмі є ланка, рух якої є заданим. Ланка, якій задається рух, що перетворюється у потрібні рухи інших ланок називається вхідною (ведучою). Ланка механізму, яка здійснює потрібний рух, для виконання якого призначено механізм, називається вихідною. Переважно у механізмі одна вхідна і одна вихідна ланки. Інші рухомі ланки – з'єднувальні або проміжні.

Рухоме з'єднання двох ланок, що дотикаються, називають кінематичною парою. Точки, лінії, поверхні ланки, якими вона стикається (з'єднується) з іншою ланкою, утворюючи кінематичну пару, називають елементами кінематичної пари. Кінематична пара при взаємодії елементів допускає відносний рух ланок.

За характером з'єднання ланок кінематичні пари поділяють на дві групи: нижчі та вищі. До нижчих відносяться пари, у яких ланки стикаються по поверхні, а до вищих - якщо елементами кінематичної пари є лише лінії або точки. При цьому лінійний або точковий контакт розуміють як початковий – при дотиканні ланок без зусиль, а під навантаженням ланки, які утворюють вищу пару, будуть дотикатись по деякій дійсній поверхні, яка називається плямою контакту.

Механізми поділяють, у першу чергу, на механізми з нижчими парами та механізми з вищими парами. Крім того, всі механізми можна поділити на

плоскі та просторові. Найрозповсюдженіші механізми з нижчими парами - важільні, клинові та гвинтові; з вищими парами - кулачкові, зубчасті, фрикційні, мальтійські та храпові. Нижче наведено приклади основних механізмів (їх схем), що застосовують у різних машинах.

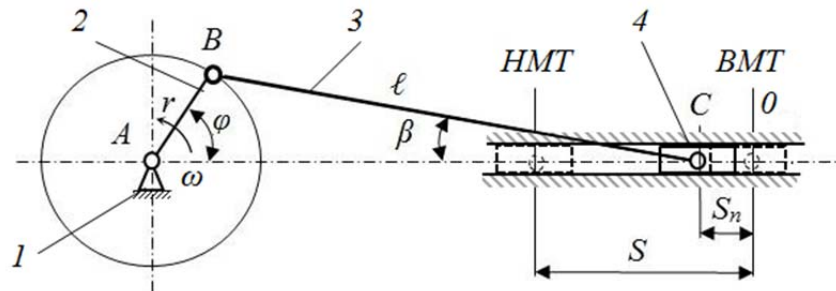


Рис. 2.30. Схема кривошипно-шатунного механізму:
1 - нерухома ланка(стояк); 2 - кривошип; 3 - шатун; 4 - повзун.

Кривошипно-шатунний механізм (КШМ) - один з найпоширеніших шарнірно-важільних механізмів (рис. 2.30). Він застосовується як для перетворення обертального руху у зворотно-поступальний (наприклад: швейні машини, поршневі насоси тощо), так і для перетворення поступального руху в обертальний (наприклад, двигуни внутрішнього згоряння).

Кривошип 2 постійно обертається, повзун 4 здійснює зворотно-поступальний, а шатун 3 - складний плоскопаралельний рух, стійка 1 є нерухомию ланкою – стояком.

Зі схеми (рис. 2.30) переміщення повзуна від BMT, яке відповідає повороту кривошипу на кут φ, визначається за формулою:

$$S_n = r \cdot (1 - \cos \varphi) + \frac{\lambda \cdot r}{4} \cdot (1 - \cos 2\varphi), \text{ де } \lambda = \frac{r}{\ell}. \quad (2.120)$$

Після диференціювання вираження (2.120) за часом визначиться швидкість повзуна, а після повторного диференціювання отримуємо залежність для прискорення повзуна:

$$v = r \cdot \omega \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\varphi \right), \quad (2.121)$$

$$a_n = r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi). \quad (2.122)$$

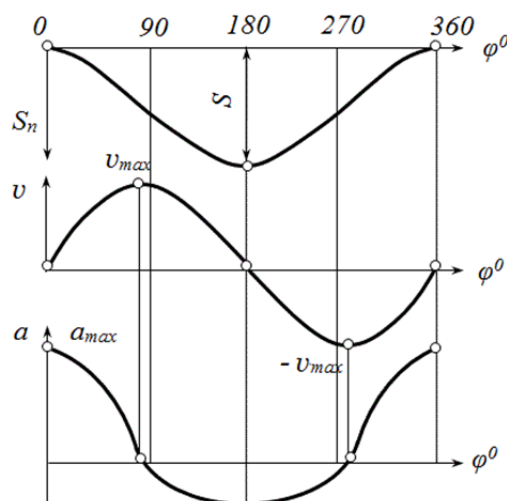


Рис.2.31. Діаграми переміщення, швидкості та прискорення повзуна.

На рис. 2.31 показані типові криві залежностей переміщення, швидкості і прискорення повзуна від кута повороту кривошипа для одного повного оберту кривошипа.

З аналізу цих кривих слідує що:

1. Однаковим кутам повороту кривошипу, тобто однаковим відрізкам часу, відповідають різні шляхи повзуна. Біля мертвих точок шляхи малі, а у міру видалення від них шлях повзуна збільшується.

2. Швидкість повзуна непостійна: вона дуже мала поблизу мертвих точок; у цих точках швидкість дорівнює нулю; найбільші значення досягаються при кутах, рівних $\approx 75^\circ$ і $\approx 286^\circ$, тобто коли вісь шатуна і радіус кривошипа утворюють кут ABC , що наближається до 90° (див. рис. 2.31).

3. Прискорення поршня досягає найбільших абсолютних значень у ВМТ і НМТ, тобто в ті моменти, коли змінюється напрям руху повзуна, при цьому прискорення в ВМТ більше, ніж в НМТ. При v_{max} прискорення дорівнює нулю (змінює знак).

Таким чином, рівномірне обертання кривошипа перетвориться у нерівномірний зворотно-поступальний рух повзуна. Повний хід повзуна дорівнює подвоєною довжині кривошипа.

У кривошипно-шатунного механізму середні швидкості руху повзуна, тобто його переміщення від крайнього лівого положення до крайнього правого і навпаки, рівні.

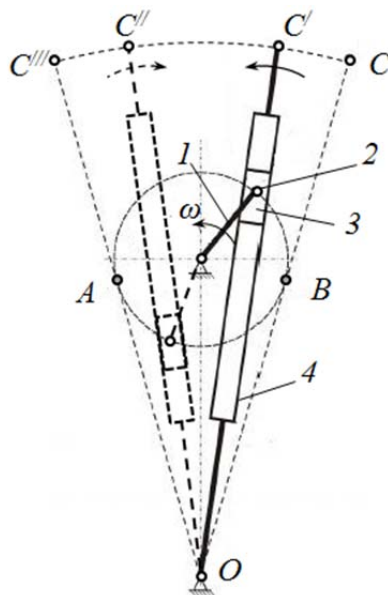


Рис. 2.32. Схема кривошипно-кулісного механізму:
 1 – кривошип; 2 – палець(шарнір); 3 – повзун; 4 – куліса.

Але в деяких випадках бажано отримати інший закон руху повзуна. Наприклад, у деяких верстатах необхідно мати різні швидкості робочого і холостого ходів різця, що здійснює зворотно-поступальний рух. Для цього застосовують кривошипно-кулісні механізми (рис. 2.32).

Навколо нерухомої осі обертається кривошип 1, на кінці якого є палець 2. На палець вільно насаджений повзун 3, що ковзає в поздовжньому



прямолинійному пазу, прорізаному в важелі 4 (кулісі). При обертанні кривошипа повзун ковзає в пазу куліси і повертає її навколо нерухомої осі.

При переміщенні пальця із положення *B* у положення *A* куліса переміщується з крайнього правого положення в крайнє ліве, а при подальшому переміщенні пальця зі стані *A* у *B* вона робить зворотний хід. Так як кути повороту кривошипа, на кінці якого знаходиться палець, при цьому нерівні, то і час, а отже, і швидкості руху куліси будуть різні. У результаті, наприклад різець, пов'язаний з кінцем куліси, буде в одному напрямку здійснювати повільний (робочий) хід, а в іншому - швидкий (холостий).

Зубчасто-рейковий механізм. Одним з простих і поширених механізмів, що перетворюють рух, є зубчасто-рейковий механізм (рис. 2.33), що складається із зубчастого колеса і зубчастої рейки з нарізаними на ній зубами. Зубчасто-рейковий механізм можна використати для різних цілей, наприклад, обертаючи зубчасте колесо на нерухомій осі, поступально переміщати рейку (у домкраті, механізмі подачі верстатів) або, обкатуючи колесо на нерухомій рейці, переміщати вісь колеса відносно рейки (при здійсненні повздовжньої подачі супорта у токарному верстаті).

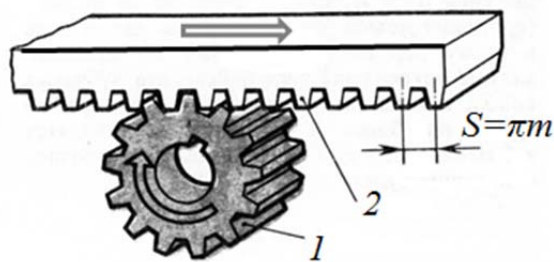


Рис. 2.33.Схема зубчасто-рейкового механізму:

1 – зубчасте колесо; *2* – рейка.

Основні кінематичні закономірності зубчасто-рейкового механізму легко виявити, якщо врахувати, що оскільки відсутнє проковзування швидкість поступального руху рейки (чи вісі колеса - у другому випадку) та колова швидкість колеса рівні.

Кулачковий механізм. Кулачкові механізми дозволяють здійснювати будь-який закон вихідної ланки при безперервному рівномірному обертанні провідної ланки. Найпростіший дисковий або плоский кулачковий механізм (рис. 2.34) являє собою кулачок (диск) 1 з притиснутим до нього пружиною 3 голчастим штовхачем (повзуном) 2. Для зменшення тертя між кулачком та вихідною ланкою можуть застосовуватися ролики (4).

Кулачкові механізми призначені для перетворення обертового руху кулачка в зворотно-поступальний або коливальний рух вихідної ланки(штовхача, коромисла). При обертанні валу кулачок тисне на штовхач, змушуючи його робити зворотно-поступальний рух.

Змінюючи профіль кулачка, можна як завгодно змінювати закон руху штовхача і пов'язаного з ним робочого органу машини. Саме ця особливість забезпечує широке застосування кулачкових механізмів в металорізальних верстатах-автоматах, ткацьких верстатах, двигунах внутрішнього згоряння.

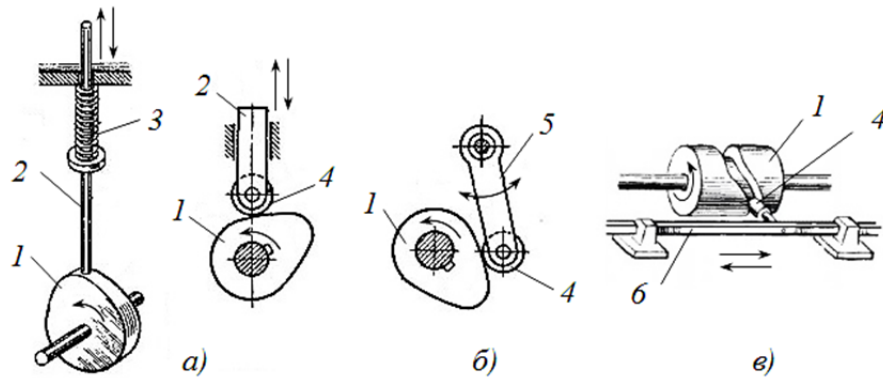


Рис. 2.34. Схеми кулачкових механізмів: зворотно-поступального руху(а), коливального руху(б), просторовий(в) (1 – кулачки; 2 – штовхачі; 3 – пружина; 4 – ролики; 5 – коромисло; 6 – планка).

Крім розглянутого механізму існує і більш складний кулачковий механізм – просторовий (рис. 2.34,в). У ньому кулачок (1) має форму циліндра з розташованим на його поверхні замкненим пазом (канавкою). У паз входить ролик (4), розташований на осі, яка жорстко з'єднана з планкою (повзуном 6). При обертанні кулачка планка здійснює зворотно-поступальний рух.

До числа недоліків кулачкових механізмів слід віднести складність виготовлення профілю кулачка, від якого вимагається велика точність.

Гвинтовий механізм складається з пари гвинт-гайка (рис. 2.35). Він широко використовується для перетворення обертального руху у поступальний.

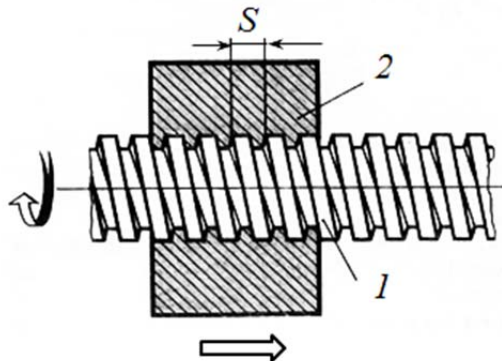


Рис. 2.35. Схеми гвинтового механізму:
1 – гвинт; 2 – гайка.

Можливо кілька варіантів конструкції і, відповідно, застосування такого механізму:

- провідний гвинт - нерухома гайка (гвинт при обертанні переміщається поступально);
- провідний гвинт - поступально рухається рухома гайка;
- провідна гайка - поступально рухається рухомий гвинт;
- провідна гайка - обертально-руховий гвинт.

До переваг гвинтових механізмів відносяться: простота отримання повільного поступального руху і можливість більшого виграшу в силі, плавність, безшумність, здатність сприймати великі навантаження, можливість здійснення переміщень з високою точністю, простота конструкції.



Недоліками гвинтових механізмів є великі втрати на тертя і, як наслідок, низький ККД. У багатьох випадках застосовують гвинти з кутами підйому різьби, що забезпечують самогальмування, тобто не перевищують кут тертя, при цьому ККД гвинтової пари нижче 50%.

Гвинти у гвинтових механізмах, в залежності від призначення, поділяють на вантажні (домкрати, преси, лебідки) і ходові (використовують для точної передачі руху у верстатах, вимірювальних приладах). Гайки вантажних і ходових гвинтів, до яких не висувають високих вимог щодо точності, виконуються цільними.

Гайки точних гвинтових механізмів мають конструкцію, що дозволяє зменшити зазор між витками гвинта і гайки, що утворився в результаті неточності при виготовленні або зносу в процесі роботи. Кінематичний розрахунок гвинтового механізму простий: за один оборот гвинта або гайки лінійне переміщення дорівнює одному ходу різьби, тобто добутку кроку на число заходів.

Механізми переривчастого односторонньої дії. Переривчастий рух в один бік найчастіше здійснюється за допомогою храпових і мальтійських механізмів. Храпові механізми застосовують для здійснення рухів подачі інструменту і оброблюваного матеріалу у різних верстатах.

Крім того, їх використовують у якості гальмівних пристроїв, що перешкоджають зворотному ходу. Так, храповий механізм у вантажопідійомних лебідках запобігає падінню піднятого вантажу.

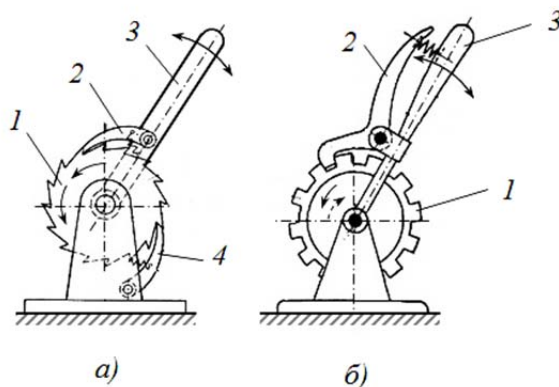


Рис. 2.36. Схеми храпових механізмів односторонньої дії (а) та двосторонньої дії (б): 1 – храпове колесо; 2 – ведуча собачка; 3 – коромисло (важіль); 4 – штопорна заскочка.

Храповий механізм із ведучою заскочкою 2 (рис. 2.36) перетворює зворотно-обертальний рух коромисла 3 у переривчастий обертальний рух (в одному напрямку) храпового колеса 1. Заскочка 4 з пружиною не дає колесу обертатися у зворотній бік.

Храпові механізми діляться на два основні класи:

1) механізми, у яких храпове колесо затримується штопорною заскочкою тільки в одному напрямку, а в іншому може рухатися, так як при обертанні піднімає заскочку (рис. 2.36,а);

2) механізми, у яких храпове колесо загальмовується у двох напрямках. До цього класу належать механізми, що мають храпове колесо з симетричними зубами (рис. 2.36,б). Дія такого храпового механізму відповідає роботі двох протилежно діючих храпових механізмів.

Мальтійські механізми (рис. 2.37) застосовують для перетворення безперервного обертання ведучої ланки 1 у переривчастий рух веденої ланки 3.

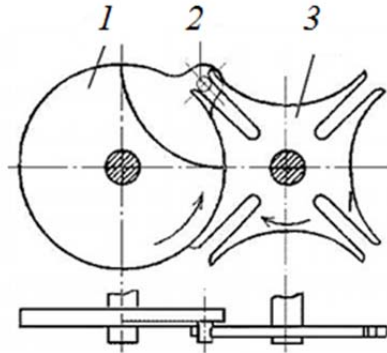


Рис. 2.37. Схема механізму мальтійський хрест:
 1 – ведуча ланка (кривошип); 2 – ролик; 3 – ведена ланка (хрест).

Ролик 2, закріплений на кривошипі 1, послідовно входить в прорізи веденої ланки (хреста 3). На рисунку показаний момент початку руху хреста 3. Ролик 2 знаходиться на початку прорізу. При обертанні кривошипу 1 за годинниковою стрілкою ролик входить всередину прорізу, наближаючись до вісі обертання хреста, а потім починає віддалятися від вісі і виходить з прорізу.

Доки ролик переміщується у прорізу, хрест повертається, а після виходу ролика з прорізу хрест зупиняється. Ролик, продовжуючи обертатися, через деякий час входить в наступний проріз хреста, і рух повторюється. Якщо хрест має чотири прорізи, як показано на рисунку, то при одному повному обороті кривошипу хрест повертається на чверть обороту.

Мальтійські механізми виготовляють з трьома, чотирма, п'ятьма, шістьма і вісьма прорізами хреста, що відповідає $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$ і $1/8$ оберту веденої ланки на один оберт ведучої.

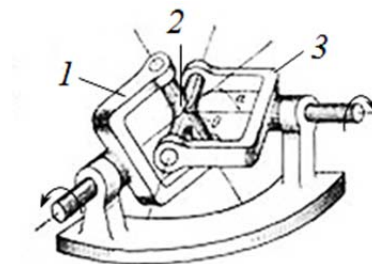


Рис. 2.38. Універсальний шарнір(карданна передача):
 1 – ведуча вилка; 2 – хрестовина; 3 – ведена вилка.

Універсальний просторовий шарнір (шарнір Гука, або карданна передача) призначений для передачі обертового руху між валами, вісі яких перетинаються, при цьому кут між ними може змінюватися під час руху (рис. 2.38). При обертанні ведучого валу (вилки) 1 починає обертатися



хрестовина, яка у свою чергу приводить в обертання ведену вилку. Особливістю механізму є те, що при обертанні вхідного валу (вилки) із сталою кутовою швидкістю вихідний вал (вилка) буде обертатися нерівномірно, при чому, чим більший кут між осями, тим більша нерівномірність обертання.

Більше докладно про структуру та властивості механізмів можна дізнатися опрацювавши курс теорії механізмів та машин [1,7,15].

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення механізму, машини.
2. Що називається ланкою, кінематичною парою?
3. Наведіть приклади основних механізмів з вищими парами.
4. Для чого призначений кривошипно-шатунний механізм, з яких основних деталей він складається?
5. Як визначити хід повзуна?
6. опишіть, які рухи здійснюються ланки КШМ.
7. У які моменти спостерігаються екстремальні значення швидкості та прискорення повзуна?
8. Поясніть будову кулачкового механізму та його призначення.
9. Для чого у кулачкових механізмах використовують ролик?
10. Які механізми призначені для забезпечення переривчастого руху вихідної ланки?
11. Поясніть будову та принцип дії карданного шарніру.

2.2.2. Механічні передачі. Загальні положення

Механічна передача – це механізм, що перетворює задані кінематичні та енергетичні параметри двигуна на потрібні параметри руху робочих органів машин та призначений для погодження режиму роботи двигуна з режимом роботи виконавчих органів.

Механічні передачі за способом передачі руху поділяють на:

- передачі зчепленням (зубчасті, ланцюгові та з зубчастим пасом);
- передачі тертям (фрикційні, пасові);
- передачі з гвинтовою парою.

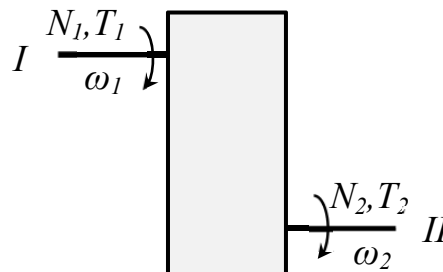


Рис. 2.39. Принципова схема механічної передачі:
I - ведучий вал; *II* – ведений вал.

На рисунку 2.39 показана принципова схема механічної передачі.

Порівняльна оцінка механічних передач

Таблиця 2.1

Тип передачі	Взаємне розташування валів	Вид передачі	Передана потужність P , кВт	Колова швидкість v , м/с	ККД η	Передатне число в одному ступені
Зубчасті	Паралельне	циліндричні із зубчастою рейкою	1000	150	0,92...0,98	3...6
					0,92...0,98	1
	Вісі валів перетинаються	конічні			0,91...0,97	3...5
		черв'ячні конічні гепоїдні циліндричні гвинтові	50	15	0,7...0,92	8...80
Ланцюгові	Паралельне	з роликівими втулковими зубчастими ланцюгами	100	15	0,91...0,97	2...6
				35		
Із зубчастим пасом	Паралельне			30	0,91...0,97	2...4
Пасові	Паралельне	плоскопасові клинопасові круглопасові	50	30	0,94...0,97	2...4
	Вісі валів перетинаються	плоскопасові круглопасові				
Фрикційні	Паралельне	$u = \text{const}$ u - змінне	300	30	0,7...0,8	3...6
	Вісі валів перетинаються	$u = \text{const}$ u - змінне				
Гвинт-гайка	Співвісні		100	5	0,3...0,4	1000

Основними параметрами передачі є вхідні та вихідні: потужність N (Вт або кВт), крутний момент T (Нм) та частота обертання ω (1/с) або n (об./хв.). Параметрам вхідного (ведучого) валу надають індекс 1, параметрам вихідного (веденого) валу – 2. Для переходу від кутової швидкості до кількості обертів за хвилину використовують залежність:



$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}. \quad (2.123)$$

Крім основних параметрів роботу механічної передачі характеризують параметри:

- передаточне відношення (число):

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}; \quad (2.124)$$

– коефіцієнт корисної дії:

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}. \quad (2.125)$$

При відомій потужності і частоті обертання на валу можна визначити крутний момент:

$$T = \frac{N}{\omega} \text{ або } T = 9550 \frac{N}{n}. \quad (2.126)$$

У залежності від співвідношення параметрів вхідного і вихідного валів передачі поділяються:

- редуктори (знижуючі передачі) – від вхідного валу до вихідного зменшується частота обертання ($\omega_2 < \omega_1$), передатне число передачі $u > 1$ і збільшується крутний момент ($T_2 > T_1$);
- мультиплікатори (підвищуючі передачі) – від вхідного валу до вихідного збільшується частота обертання ($\omega_2 > \omega_1$), передатне число передачі $u < 1$ і зменшується крутний момент ($T_2 < T_1$);

Деякі орієнтовні показники передач подані у таблиці 2.1.

2.2.3. Фрикційні передачі

Фрикційні передачі передають обертальний рух за рахунок сил тертя. Прості передачі складаються з двох циліндричних або конічних роликів – котків (рис. 2.40).

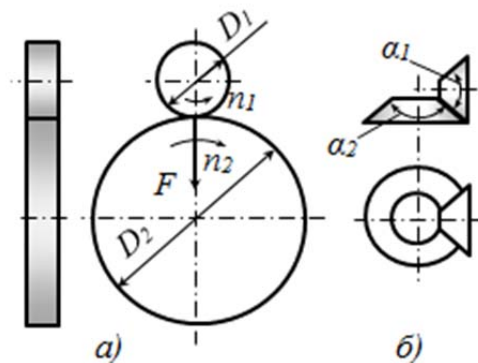


Рис. 2.40. Принципові схеми циліндричної (а) та конічної (б) фрикційних передач.

Головна умова роботи передачі полягає в тому, що момент сил тертя між котками має бути більше крутного моменту, що передається.

Передатне відношення циліндричної фрикційної передачі визначають як відношення частот обертання або діаметрів тіл кочення:

$$u = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}(1 - \varepsilon), \quad (2.127)$$

де ε - коефіцієнт ковзання (0,05 - для передач "насухо"; 0,01 - для передач з мастилом і великими передатними відношеннями).

Для конічної передачі при розрахунку передатного відношення замість діаметрів беруть твірні кути конусів. Фрикційні передачі виконуються або з постійним, або з регульованим передатними відношенням (варіатори). Передачі з постійним передатним відношенням застосовуються рідко, головним чином, в кінематичних ланцюгах приладів.

Фрикційні передачі поступаються зубчастим передачам у потужності. Фрикційні варіатори застосовують як в кінематичних, так і в силових передачах для безступінчастого регулювання швидкості. Зубчасті передачі не дозволяють такого регулювання.

Переваги фрикційних передач:

- простота тіл кочення;
- рівномірність обертання, що зручно для приладів;
- можливість плавного регулювання швидкості;
- відсутність мертвого ходу при реверсі передачі.

Недоліки фрикційних передач :

- потреба у притискних пристроях;
- великі навантаження на вали, оскільки потрібне притиснення дисків;
- великі втрати на тертя;
- ушкодження котків при пробуксовуванні;
- неточність передатних відношень із-за пробуксовування.

Основними видами поломок фрикційних передач є:

- втомне викрашування (у передачах з рідинним тертям знос зводиться до мінімуму);
- зношення (у передачах без мастила);
- задір поверхні при пробуксовуванні.

Оскільки усі ці недоліки наслідок високої контактної напруги притискання, то в якості проектувального виконується розрахунок по допустимій контактній нарузі. Для цього застосовується формула Герца-Беляєва. Діаметри фрикційних коліс визначаються за формулою:

$$D_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{E \frac{\beta}{\psi f} \frac{N_1}{n_2} \left(\frac{1292}{u[\sigma]_k} \right)^2}, \quad D_2 = uD_1, \quad (2.128)$$

де E – модуль пружності матеріалу котків, МПа;

β – коефіцієнт запасу;

ψ – коефіцієнт ширини ведучого котка;

N_1 – потужність передачі, кВт;

n_2 – частота обертання відомого котка, об/хв.;

u – передатне відношення передачі;

$[\sigma]_k$ – допустима контактна напруга, МПа.

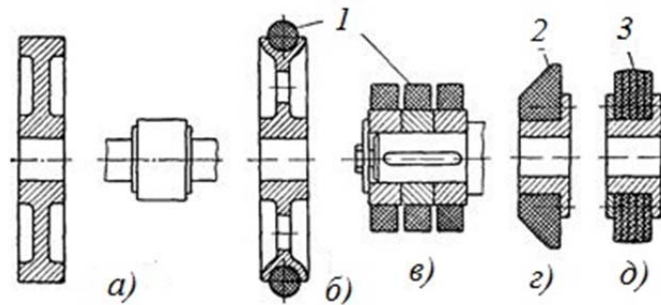


Рис. 2.41. Конструкція котків фрикційних передач з металу (а), збірні насадної конструкції з неметалевими матеріалами (б-д):
1-гума; 2-текстоліт; 3 – шкіра.

Основні вимоги до матеріалів фрикційних коліс :

- висока зносостійкість і поверхнева міцність;
- високий коефіцієнт тертя (щоб уникнути великих сил стискування);
- високий модуль пружності (щоб ділянка контакту, а значить і втрати на тертя були малі).

Найбільш придатними для виготовлення фрикційних коліс виявляються кулькопідшипникові сталі типу ШХ15 або 18ХГТ, 18Х2Н4МА. Для збільшення коефіцієнту тертя використовують спеціальні фрикційні пластмаси з азбестовим і целюлозним наповнювачем, коефіцієнт тертя яких досягає $f = 0,5$. Широко застосовується текстоліт. Також застосовують обгумовані котки, проте їх коефіцієнт тертя залежить від вологості повітря (падає із зростанням вологості). Для найбільш потужних передач застосовують пресований азбест, прогумовану тканину і шкіру. Надійніші ті передачі, у яких ведучий коток твердіший, ніж ведений, оскільки тоді при пробуксовуванні не утворюються риски.

Питання для самоконтролю

1. Поясніть будову фрикційних передач.
2. За рахунок яких сил передають рух фрикційні передачі ?
3. Що таке «варіатор»?
4. Як визначається передатне відношення фрикційної передачі?
5. Які достоїнства і недоліки фрикційних передач ?
6. Які основні види поломок фрикційних передач ?
7. Який вид деформації є основою для розрахунку фрикційних передач?
8. Які матеріали застосовуються для котків фрикційних передач ?

2.2.4. Пасові передачі

Пасова передача - це передача гнучким зв'язком (рис. 2.42), яка складається з ведучого 1 і веденого 2 шківів і надітого на них пасу 3. До складу передачі можуть також входити натягачі і огорожа. Можливе використання декількох ведених шківів і декількох пасів. Шківви жорстко закріплені на ведучому і веденому шківвах. Основне призначення - передача механічної енергії з пониженням частоти обертання.

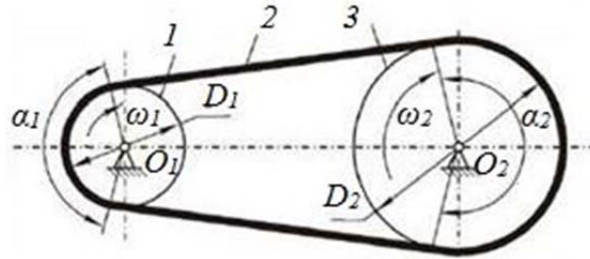


Рис. 2.42. Принципова кінематична схема пасової передачі.

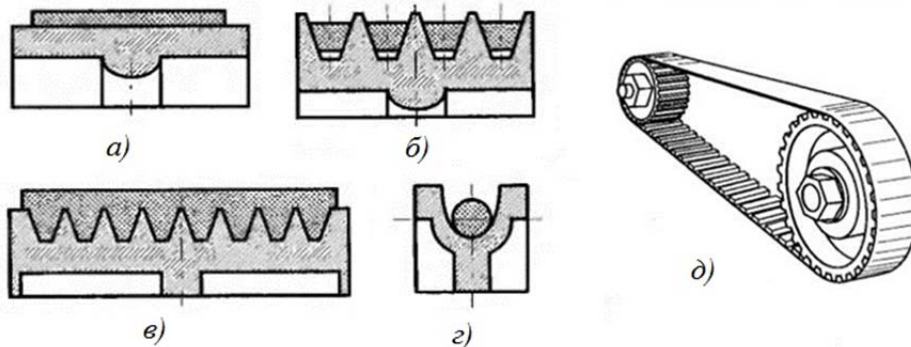


Рис. 2.43. Види пасових передач за формою поперечного перерізу пасу.

За принципом дії розрізняють передачі тертям (більшість передач) і зачепленням - зубчато-пасові (рис. 2.43,д). Залежно від форми поперечного перерізу пасу розрізняють передачі: плоско-пасові (рис. 2.43,а), клино-пасові (рис. 2.43,б), поліклинові (рис. 2.43,в), кругло-пасові (рис. 2.43,г). Клинові, поліклинові, зубчасті і швидкохідні плоскі паси виготовляють нескінченними замкненими. Плоскі паси переважно випускають у вигляді довгих стрічок.

Переваги пасових передач тертям: відсутність мастильної системи, простота і низька вартість конструкції, захист деталей від різких коливань навантаження і ударів, можливість передачі руху на значні відстані, захист від перевантаження за рахунок проковзування, плавність і низька шумність роботи.

Недоліки: мала довговічність пасів у швидкохідних передачах; значні габарити; непостійність передатного відношення (за рахунок проковзування пасів на шківках); необхідність захисту пасу від потрапляння масла; значні сили, що діють на вали і опори, необхідні для забезпечення потрібних сил тертя на шківках.

Для визначення передатного відношення пасової передачі попередньо будемо вважати, що пас не витягується і не проковзує на шківках. Тоді лінійні швидкості пасу на ведучому та веденому шківках однакові, тобто:

$$v_1 = v_2 \text{ або } \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2. \quad (2.129)$$

Звідки передатне відношення:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{D_2}{D_1}. \quad (2.130)$$

З урахуванням можливості проковзування формула набуває вигляду:

$$u = \frac{D_2}{D_1(1-\varepsilon)}, \quad (2.131)$$



де ε – коефіцієнт проковзування $\varepsilon = \frac{v_1 - v_2}{v_1}$.

Коефіцієнт проковзування для вірно спроектованої та налагодженої пасової передачі складає $\varepsilon = 0,01 \dots 0,02$.

Кути α_1 і α_2 (рис. 2.42), відповідні до дуг, за якими дотикаються пас та шків, називаються кутами обхвату. Оскільки пасова передача передає обертання за рахунок сил тертя між пасом і шківом, її працездатність істотно залежить від кутів обхвату, визначальним з яких є кут обхвату на меншому шківі. Його величина у першу чергу залежить від відстані між центрами шківів (міжосьова відстань) і передатного відношення. Практика показала, що плоско-пасові передачі працюють нормально, якщо кут обхвату не менше 120° . Ця вимога виконується, якщо дотримуються наступні умови: передатне відношення не більш 3 і міжосьова відстань не менш подвоєної суми діаметрів шківів. Покращити умови зчеплення та підтримувати їх з часом експлуатації дозволяє використання натяжних роликів 4 (рис. 2.44). У якості елемента, що утворює натяг, використовують важелі або пружини.

Гранична колова швидкість плоско-пасової передачі у залежності від матеріалу пасу вкладає 20 - 40 м/с.

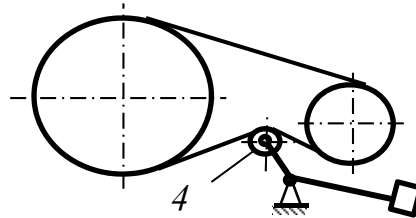


Рис. 2.44. Схема пасової передачі з натягачем.

Більш досконалим видом передачі руху гнучким зв'язком є клинопасова передача, де на ободах шківів зроблені канавки, в які входить пас, що має в поперечному перерізі форму трапеції. У цих передачах корисне навантаження передається за рахунок сил тертя між бічними поверхнями пасу та канавок шківів. Трапецієвидний перетин пасу викликає його розклинювання у канавці шківа, що збільшує зчеплення пасу з шківом і підвищує тягову здатність передачі. Це дає можливість застосовувати більш високі передаточні відношення (до 7 і навіть до 10) і можливість використання при малих міжцентрових відстанях. Якщо для плоско-пасової передачі міжцентрову відстань розраховується:

$$A_{\min} = 2 \times (D_1 + D_2), \quad (2.132)$$

то для клинопасової передачі:

$$A_{\min} \approx D_2. \quad (2.133)$$

Крім цього, клинопасова передача дозволяє однією передачею здійснити обертання декількох відомих валів без застосування натяжних роликів. Компактність дозволяє здійснити більш просту огорожу. На кінематичних схемах пасові передачі мають відповідні умовні позначення.

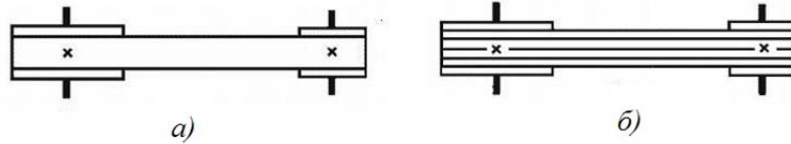


Рис. 2.45. Умовні позначення пасових передач з плоским (а) та з клиновим пасами.

Розглянемо зусилля та напруження у гілках при передаванні робочого навантаження.

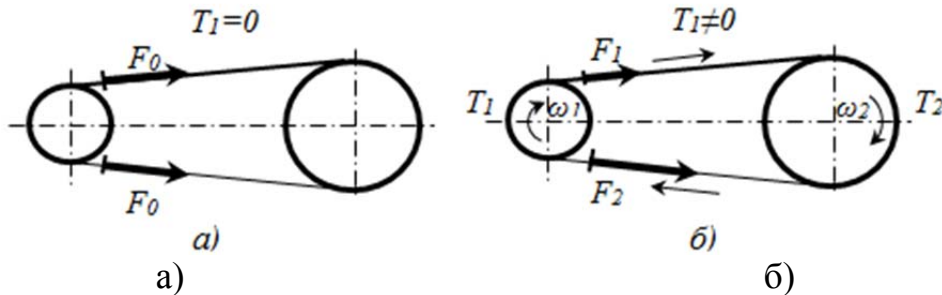


Рис. 2.46. До визначення зусиль у вітках пасу.

При відсутності у передачі навантаження пасова передача знаходиться у статичному стані, у гілках пасу спостерігаються зусилля попереднього натягу F_0 (рис. 2.46,а). Після прикладання робочого навантаження (крутного моменту T_1 на ведучому шківі і T_2 на веденому шківі) зусилля у гілках пасу змінюються (рис.2.46,б): у ведучій гілці зусилля збільшується і стає F_1 , а у веденій - зменшується і стає F_2 . За умовою рівноваги шківів маємо:

$$T_1 = (F_1 - F_2) \cdot d/2 \quad \text{або} \quad F_1 - F_2 = F_t, \quad (2.134)$$

де $F_t = 2T_1/d_1$ – колова сила на шківі або корисне навантаження пасу.

Зв'язок між F_0 , F_1 та F_2 можна встановити з таких міркувань. Довжина пасу не залежить від навантаження і залишається незмінною як у ненавантаженій, так і у навантаженій передачі. Відповідно додаткове витягування ведучої гілки компенсується рівним скороченням веденої гілки. Тому збільшення зусилля у ведучій гілці на ΔF забезпечує зменшення зусилля у веденій вітці на ΔF (при лінійній залежності між силою та деформацією), тобто:

$$F_1 = F_0 + \Delta F; \quad F_2 = F_0 - \Delta F \quad (2.135)$$

Записані два рівняння дозволяють дістати вираз:

$$F_1 + F_2 = 2F_0. \quad (2.136)$$

З рівнянь (2.135) та (2.136) визначаємо:

$$F_1 = F_0 + 0,5F_t; \quad F_2 = F_0 - 0,5F_t. \quad (2.137)$$

Напруження у поперечних перерізах ведучої та веденої гілок можна знайти, поділивши праві та ліві частини рівнянь (2.137) на площу A перерізу пасу:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + 0,5 \sigma_t, \quad \sigma_2 = \sigma_0 - 0,5 \sigma_t, \quad (2.138)$$

де $\sigma_t = F_t/A$ – напруження у пасі від робочого навантаження (корисне напруження у пасі).



Розрахунок пасової передачі базується на понятті тягової здатності. Паси, що розраховані за цим принципом, забезпечують потрібну довговічність. Основою для розрахунку є експериментальні дані для існуючих типів пасів.

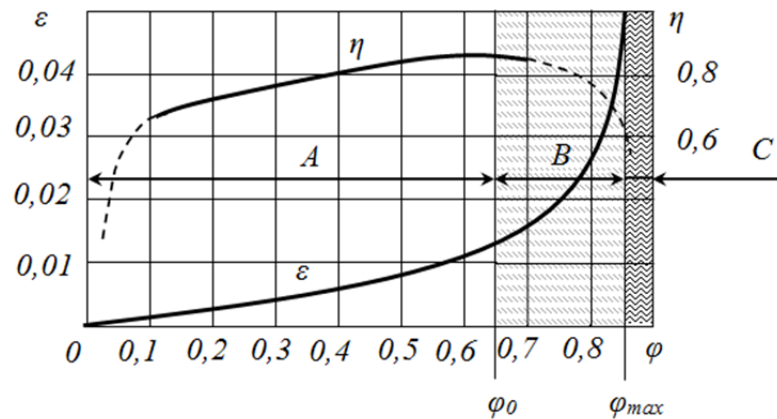


Рис. 2.47. Залежність коефіцієнту проковзування ε від коефіцієнту тяги φ : A – зона пружного ковзання; B – зона часткового буксування; C – зона повного буксування.

Дослідним шляхом встановлюється взаємозв'язок відносного ковзання ε паса та ККД передачі η із коефіцієнтом тяги φ (рис. 2.47). Коефіцієнт тяги φ – це відношення корисного навантаження паса до суми сил натягу гілок передачі:

$$\varphi = F_t / (F_1 + F_2) = F_t / (2F_0) = \sigma_t / 2\sigma_0. \quad (2.139)$$

Як бачимо (рис. 2.47), існує критичне значення коефіцієнту тяги φ_0 перебільшення якого веде до пробуксування паса та різкого зменшення ККД передачі. Середні значення критичного коефіцієнту тяги φ_0 визначені експериментальним шляхом складають: для гумотканинних та шкіряних пасів – 0,6, бавовняних – 0,5, клинових – 0,7.

За критичним коефіцієнтом тяги φ_0 можна визначити оптимальне корисне навантаження F_{t0} при певному попередньому натязі F_0 паса або інші оптимальні параметри, такі як корисне напруження σ_{t0} або потужність P_0 , яку передає один пас:

$$F_{t0} = 2 F_0 \cdot \varphi_0. \quad (2.140)$$

Вибір попереднього натягу F_0 гілок паса має суттєве значення для роботи пасової передачі. При малих значеннях F_0 для взятого типу паса будемо мати відповідно малу корисну силу F_{t0} , зате достатньо високу довговічність паса і, навпаки, при високих значеннях F_0 – значну корисну силу F_{t0} , але недостатню довговічність паса та значні навантаження на вали передачі і їхні опори. Для різних типів пасів розроблені відповідні рекомендації для вибору F_0 або σ_0 , які забезпечують достатню тягову здатність та допустиму довговічність паса.

Питання для самоконтролю

1. У яких випадках застосовують пасові передачі. З яких елементів вони складаються?
2. Якими за формою перерізу паса бувають пасові передачі?
3. Чому у багатоступінчастих приводах пасову передачу розташовують на швидкохідному ступені?
4. Навіщо в пасовій передачі утворюють початковий натяг пасів?

5. З якими явищами пов'язані втрати потужності у пасовій передачі? Чим вони характеризуються?

6. Що є основним критерієм працездатності і розрахунку пасової передачі? Що він характеризує?

7. При яких значеннях коефіцієнту тяги умови роботи передачі слід вважати оптимальними?

2.5. Зубчаті передачі

Зубчаста передача (рис. 2.48) складається з двох коліс з нарізаними на них зубами. Ведуче колесо називають шестернею 1, відоме – зубчастим колесом 2. При обертанні шестерні її зуби взаємодіють з зубами веденого колеса, в результаті чого воно також починає обертатися.

До переваг зубчастих передач належать:

- компактність;
- найбільші передані потужності;
- найбільші коллові швидкості;
- постійне передатне відношення;
- високий ККД.

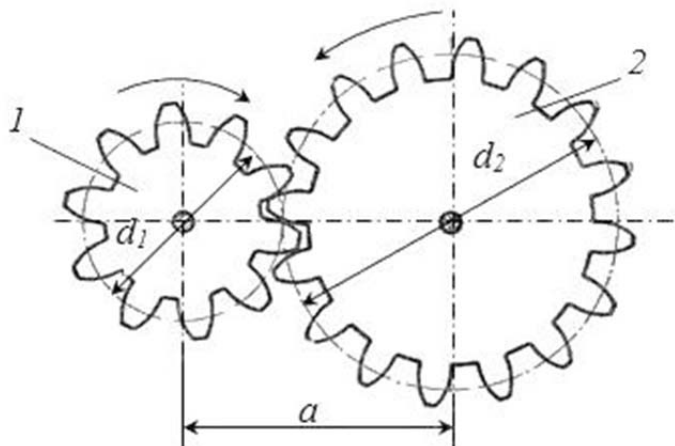


Рис. 2.48. Зубчастої передачі.

Недоліками слід вважати:

- складність передачі руху на значні відстані;
- жорсткість передачі;
- шум під час роботи;
- потребує змащення.

Найбільш поширені передачі із зубами, профілі яких виконані за евольвентою. Такий профіль дозволяє зубам при обертанні коліс обкатуватися одне за одним, внаслідок чого передача працює плавно з невеликими втратами енергії на тертя.

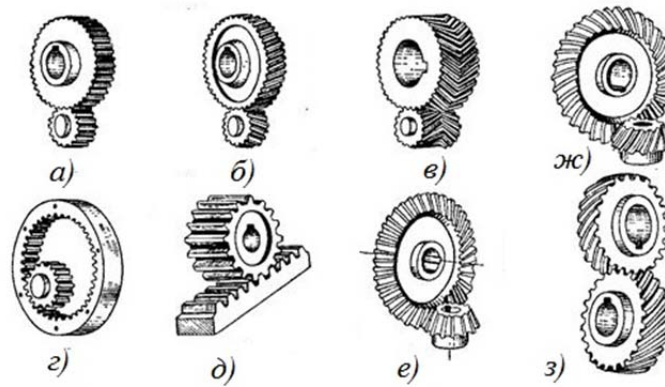


Рис. 2.49. Види зубчастих передач.

Циліндричні зубчасті колеса бувають з прямими (рис. 2.49,а), косими (рис. 2.49,б) і шевронними зубами (рис. 2.49,в). Косозубі і шевронні колеса забезпечують більш плавний хід передачі, так як в зачепленні знаходяться одночасно більша кількість пар зубів у порівнянні з прямозубою передачею. Для передачі обертання між валами, які перехрещуються, використовують гвинтові зубчасті передачі (рис. 2.49,з). За формою колеса розрізняють конічні (рис. 2.49,е), гепоїдні (рис. 2.49,ж), рейкові (рис. 2.49,д) зубчасті передачі.

Якщо при обертанні зубчастих коліс уявити собі у передачі два кола, що дотикаються 1 і 2 діаметрами d_1 і d_2 (див. рис. 2.48), які котяться одне за іншим без ковзання, то це дозволить використати для зубчастої передачі основні кінематичні закономірності фрикційної передачі. Тоді для зубчастої передачі передатне відношення:

$$u = \frac{d_2}{d_1}. \quad (2.141)$$

Однак скористатися наведеним співвідношенням для практичного визначення передатного відношення не можна, так як діаметри уявних кіл (їх називають ділильні окружності) важко заміряти.

Зачеплення зубчастих коліс у передачі вимагає дотримання основної умови: при зачепленні зуб одного колеса повинен точно входити у відповідну йому западину іншого колеса. При виготовленні стандартних зубчастих коліс ділильне коло збігається з початковим колом. Таким чином, можна сказати, що зубчасте зачеплення можливе лише при рівності колових кроків p , виміряних за дугами ділильних кіл (рис. 2.50).

Коловий крок p – це довжина відрізка дуги ділильного кола, розділеного на число зубів z . Тоді діаметри ділильного кола визначаються:

$$d_1 = \frac{pz_1}{\pi} \quad \text{та} \quad d_2 = \frac{pz_2}{\pi}. \quad (2.142)$$

Оскільки величина, наявна в обох рівняннях, $\frac{p}{\pi}$ не може бути обчислена точно, замість неї ввели величину m [мм], яку назвали модулем зубчастого колеса:

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (2.143)$$

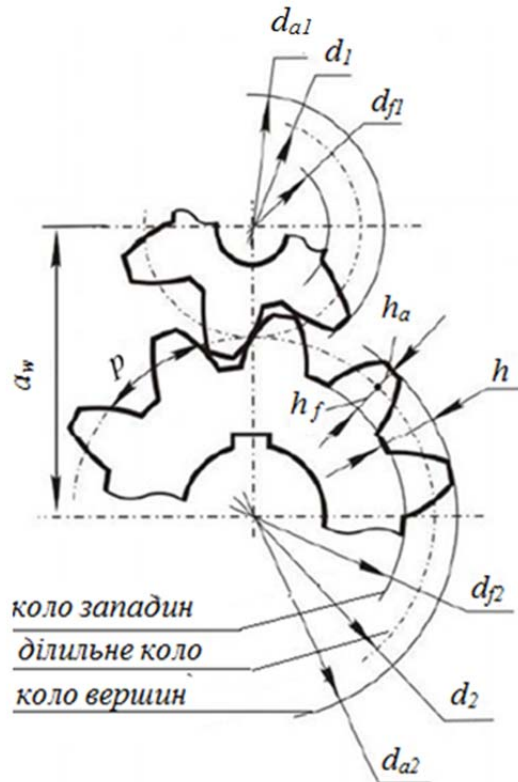


Рис. 2.50. Геометричні параметри зубчастого зачеплення.

Значення модуля є основною геометричною характеристикою зубчастого колеса. Вони стандартизовані, це полегшує виготовлення і підбір зубчастих коліс. Залежність для визначення ділильних діаметрів набуває вигляду:

$$d_1 = mz_1 \text{ та } d_2 = mz_2. \quad (2.144)$$

Після підстановки у (2.141) отримуємо визначення передатного відношення для зубчастої передачі у вигляді:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.145)$$

Відстань від ділильного кола до вершини зуба називається висотою головки зуба h_a (див. рис. 2.50), а від ділильного кола до основи зуба – висотою ніжки зуба h_f .

Для циліндричного зубчастого некорегованого колеса основні розміри визначаються за формулами:

діаметр ділильного кола: $d = mz$;

діаметр кола вершин: $d_a = d + 2h_a = m \times z + 2m = m(z+2)$;

діаметр кола западин: $d_f = d - 2h_f = m \times z - 2,5m = m(z-2,5)$;

відстані між центрами коліс: $a_w = d_1 + d_2 = m(z_1 + z_2)$.

Модуль колеса можна визначити, якщо виміряти діаметр кола вершин і розділити його на кількість зубів, збільшених на два (з наступним округленням до найближчої стандартної величини).

**Розміри елементів зубів циліндричних зубчатих коліс**

Таблиця 2.2

Елементи зубця	Колесо	
	прямозубе	косозубе (шевронне)
Висота: голівки ніжки зубця	$h_a = h_a^* \cdot m = m$	$h_a = h_a^* \cdot m_n = m_n$
	$h_f = (h_a^* + c^*) \cdot m = 1,25m$	$h_f = (h_a^* + c^*) \cdot m_n = 1,25m_n$
	$h = h_a + h_f = 2,25m$	$h = h_a + h_f = 2,25m_n$
Радіальний зазор	$c = c^* \cdot m = 0,25m$	$c = c^* \cdot m_n = 0,25m_n$
Радіус кривини перехідної кривої	$p_f = p_f \cdot m = 0,38m$	$p_f = p_f \cdot m_n = 0,38m_n$

Примітка. h_a^* , c^* , p_f^* - коефіцієнти висоти голівки радіального зазору, радіуса кривини перехідної кривої; m_n - модуль у напрямку нормалі до зубів.

Геометричний розрахунок косозубих і шевронних коліс більш складний (табл. 2.2, 2.3)

Міжосьова відстань циліндричних зубчастих передач визначається:

– прямозубої:

$$a_w = 0,5 (d_1 + d_2) = 0,5m \cdot (z_1 + z_2); \quad (2.146)$$

– косозубої або (шевронної):

$$a_w = \frac{0,5m_n (z_1 + z_2)}{\cos \beta}. \quad (2.147)$$

Враховуючи те, що передатне число зубчастої передачі $u = z_2/z_1$, ділильні діаметри зубчастих коліс (у некоригованих передачах початкові збігаються з ділильними) можуть бути виражені через міжосьову відстань:

$$d_1 = 2a_w(u \pm 1); \quad d_2 = 2a_w \cdot u / (u \pm 1). \quad (2.148)$$

Тут знак «плюс» – для передачі зовнішнього зачеплення; знак «мінус» – для передачі внутрішнього зачеплення.

Розміри вінців пари циліндричних зубчастих коліс

Таблиця 2.3.

Діаметри вінців	Передача	
	прямозуба	косозуба (шевронна)
Ділильні	$d_1 = m \cdot z_1; \quad d_2 = m \cdot z_2$	$d_1 = m_n \cdot z_1 / \cos \beta; \quad d_2 = m_n \cdot z_2 / \cos \beta$
Вершин зубців	$d_{a1} = d_1 + 2h_a = d_1 + 2m;$ $d_{a2} = d_2 + 2h_a = d_2 + 2m;$	$d_{a1} = d_1 + 2h_a = d_1 + 2m_n;$ $d_{a2} = d_2 + 2h_a = d_2 + 2m_n;$
Впадин	$d_{f1} = d_1 - 2h_f = d_1 - 2,5m;$ $d_{f2} = d_2 - 2h_f = d_2 - 2,5m$	$d_{f1} = d_1 - 2h_f = d_1 - 2,5m_n;$ $d_{f2} = d_2 - 2h_f = d_2 - 2,5m_n$

Примітка. β – кут нахилу зубів; m_n – модуль у напрямку нормалі до зубів.

Ширину зубчастого вінця b_2 колеса потрібно брати залежно від міжосьової відстані передачі:

$$b_2 = \psi_{ba} \cdot a_w, \quad (2.149)$$

де ψ_{ba} – коефіцієнт ширини вінця, який беруть: $\psi_{ba} = 0,1 \dots 0,4$ – для прямозубих передач, $\psi_{ba} = 0,2 \dots 0,5$ – для косозубих та $\psi_{ba} = 0,4 \dots 0,8$ – для шевронних передач. Менші значення ψ_{ba} – при несиметричному або консольному розміщенні зубчастого колеса щодо опор валу, а також при твердості зубчастих коліс $H > 350$ НВ.

Ширину зубчастого вінця шестірні b_1 беруть на 2 –5 мм більшою від ширини вінця колеса з метою забезпечення повноти контакту зубців по їх довжині при можливих похибках у монтажі валів передачі в осьовому напрямі.

При найбільш поширеному способі виготовлення зубчастих коліс методом обкатки зуборізним інструментом число зубів не може бути менше 17. У іншому випадку інструмент буде підрізати ніжку зуба і послаблювати його. Найбільше число зубів теоретично необмежене, однак і тут є розумна межа. З урахуванням цих обмежень встановлені оптимальні величини передатного відношення $u = 1...5(7)$.

Якість роботи передачі пов'язана з похибками виготовлення зубчастих передач та деталей (корпусу, підшипників, валів), які визначають їх взаємне розташування. Деформація деталей під навантаженням теж впливає на якість передачі.

Основні помилки при виготовленні:

- помилки кроку та форми профілю зубців, які викликають порушення кінематичної точності, плавності роботи (коливання та додаткові динамічні навантаження, удари, шум при роботі);
- помилки у напрямку зубів відносно утворюючих ділительних поверхонь, які викликають нерівномірне розподілення навантаження по довжині зуба.

Точність виготовлення зубчастих коліс регламентується ДСТУ ISO54-2001, який передбачає 12 ступенів точності. Кожний ступінь точності характеризується трьома показниками:

- нормою кінематичної точності, яка регламентує найбільшу похибку передатного відношення чи повну похибку кута повороту зубчастого колеса в межах одного обороту у зачепленні з еталонним колесом;
- нормою плавності роботи, яка регламентує циклічні помилки передатного відношення чи кута повороту зубчастого колеса в межах одного обороту, які багаторазово повторюються;
- нормою контакту зубів, яка регламентує помилки виготовлення зубців та складання передачі, що впливають на розміри плями контакту у зачепленні (розподілення навантаження по довжині зубців).

Ступінь точності обирають у залежності від призначення передачі. Найбільш поширені 6,7,8 ступені точності.

Для того щоб виключити заклинювання передачі у зачепленні, повинен бути бічний зазор. Розмір зазору регламентується видом сполучення зубчастого колеса. Стандартизовано 6 видів бічного зазору:

- H – нульовий зазор;
- E – малий зазор;
- C, D – зменшений зазор;
- B – нормальний зазор;
- A – збільшений зазор.

Зазори H, E, C потребують підвищеної точності виготовлення, застосовуються для реверсивних передач при високих вимогах до кінематичної точності, а також при існуванні крутильних коливань валів.



Вирішальний вплив на працездатність зубів коліс у зубчастих передачах здійснюють контактні напруження σ_H та напруження згину σ_F , які носять циклічний характер.

Контактні напруження σ_H виникають у місці контакту зубів і викликають викришування поверхонь зубів поблизу полюса зачеплення. Напруження згинання σ_F виникають в області ніжок і викликають втомлювальне руйнування зубів.

Заходи з запобігання викришуванню зубів:

- визначення розмірів зубів за розрахунком на втомлюваність по контактним напруженням σ_H ;
- підвищення твердості робочих поверхонь зубів шляхом термообробки;
- підвищення ступеня точності за нормою контакту зубів.

Заходи з запобігання поломки зубців:

- визначення розмірів зубів за розрахунком на втомлюваність по напруженням згину σ_F ;
- збільшення модулю зубчастого колеса;
- позитивне зміщення зуборізного інструменту при виготовленні коліс;
- термообробка;
- наклеп.

Поломка зубів може також виникати внаслідок перевантаження або концентрації напружень. Для зменшення впливу вказаних чинників використовують:

- захист передач від перевантажень;
- збільшення жорсткості валів;
- використання зубів зі зрізаними кутами та бочкоподібних зубів.

Проектувальний розрахунок на міцність закритих швидкохідних зубчастих передач виконується за допустимими контактними напруженнями $[\sigma_H]$. Потім виконується перевірочний розрахунок за допустимими напруженнями згину $[\sigma_F]$.

Розглянемо сили, що виникають у зачепленні (рис. 2.51).

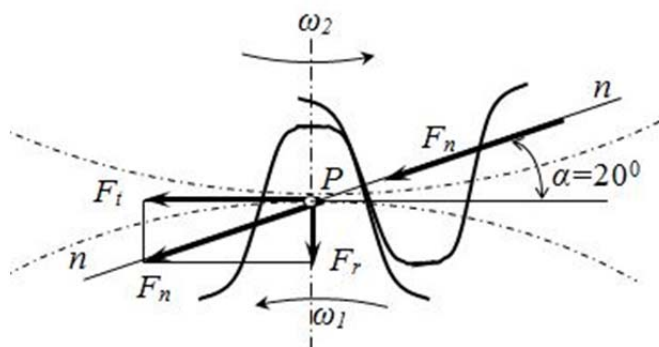


Рис. 2.51. Розрахункова схема сил у зачепленні зубчастої передачі.

F_n – нормальна сила, спрямована за лінією зачеплення як загальної нормалі до поверхонь зубів. При розрахунках зубчастих передач силу F_n

переносять у полюс P і розкладають на складові: колову F_t та радіальну F_r сили, які визначаються:

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}, \quad (2.150)$$

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.151)$$

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha}. \quad (2.153)$$

Розрахунок міцності зубів за контактними напруженнями виконується на основі формули Герца-Беляєва:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{E_{np} q_n}{2\pi(1-\mu^2)\rho_{np}}} \leq [\sigma]_H. \quad (2.154)$$

де E_{np} - приведений модуль пружності матеріалів шестерні і колеса,
 $E_{np} = 2 E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$;

ρ_{np} - приведений радіус кривизни зубів, які визначаються за формулою

$$1/\rho_{np} = 1/\rho_1 + 1/\rho_2, \text{ де } \rho_{1(2)} = 0,5d_{1(2)} \sin \alpha;$$

μ - коефіцієнт Пуассона;

q_n - питоме нормальне навантаження $q_n = F_n/b$;

$[\sigma]_H$ - допустима контактна напруга з урахуванням фактичних умов роботи.

Якщо у формулу (2.154) підставити вирази нормальної сили через крутний момент та виразити усі геометричні розміри через міжосьову відстань a_w , отримуємо рівняння з одним невідомим a_w при заданих крутному моменту, передатному відношенні та допустимій контактній напрузі. Розв'язок цього рівняння є початковим для розрахунку зубчастої передачі. Міжосьову відстань передачі a_w (мм) визначають за формулою:

$$a_w = K_a (u + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2 \cdot K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 \cdot u^2 \cdot \Psi_{ba}}} \quad (2.155)$$

де K_a - допоміжний коефіцієнт, для прямозубих коліс: $K_a = 450$, для косозубих коліс $K_a = 410$;

Ψ_{ba} - коефіцієнт ширини вінця колеса, вибирається зі стандартного ряду:

0,1; 0,125; 0,16; 0,25; 0,315; 0,4; 0,5; 0,63; 0,8; 1,0; 1,25.

Для прямозубих коліс рекомендується $\Psi_{ba} \leq 0,25$, для косозубих - 0,25-0,63.

u - передатне число передачі;

T_2 - крутний момент на другому валу зубчастої передачі, Н·м;

$[\sigma_H]$ - допустима контактна напруга, МПа;

$K_{H\beta}$ - коефіцієнт нерівномірності навантаження.

По вличині a_w призначають модуль m із стандартного ряду у межах $m_n = (0,01 \dots 0,02) \cdot a_w$. Можна також вибирати m , орієнтуючись на рекомендації, вироблені на практиці.



Дрібномодульні колеса з великим числом зубів забезпечують плавність ходу передачі та її економічність. Вони мають такі переваги:

- зменшуються втрати на тертя (зменшується ковзання);
- скорочується витрата матеріалу (зменшується d_a);
- заощаджується верстатний час нарізування зубців (зменшується обсяг матеріалу, що зрізується).

До недоліків відносять:

- чутливість до перевантажень;
- чутливість до неоднорідності матеріалу.

Крупномодульні колеса з великим числом зубів довше протистоять зношуванню, можуть працювати тривалий час після початку викришування, менш чутливі до перевантажень і неоднорідності матеріалу.

За обраним модулем визначають геометричні розміри зубчастих коліс та перевіряють зуби на згин. Для цього потрібно визначити напруги у зубах коліс.

У зубах існує складний напружений стан. Найбільш небезпечні напруження згину σ_F утворюються у корені зубу в зоні переходу евольвенти в галтель (рис. 2.52). Тут же спостерігається концентрація напружень.

При розрахунку на міцність за напруженнями згину приймаються такі

припущення:

1 Усе навантаження у зачепленні передається однією парою зубів і прикладене до вершини зубу.

2 Зуби розглядаються як консольні балки, для яких справедливим є метод перетинів. Фактично зуби подібні до виступів, у яких розміри поперечного перерізу порівняні з розмірами висоти. Точний розрахунок напружень у таких елементах виконують методами теорії пружності, результати точного розрахунку використовують для корегування наближеного розрахунку шляхом введення коефіцієнта концентрації напружень.

3. За розрахункове напруження беруть напруження на розтягнутому боці зубця σ_F (для сталей розтягання небезпечніше за стиск).

Особливості розрахунку косозубих циліндричних передач. Косозубі циліндричні передачі нарізуються тим самим різальним інструментом, на тих самих верстатах, за тією самою технологією, що і прямозубі. При цьому заготовку повертають на кут β , тому зуби розташовуються не по утворюючій ділильного циліндра, а складають з нею кут β .

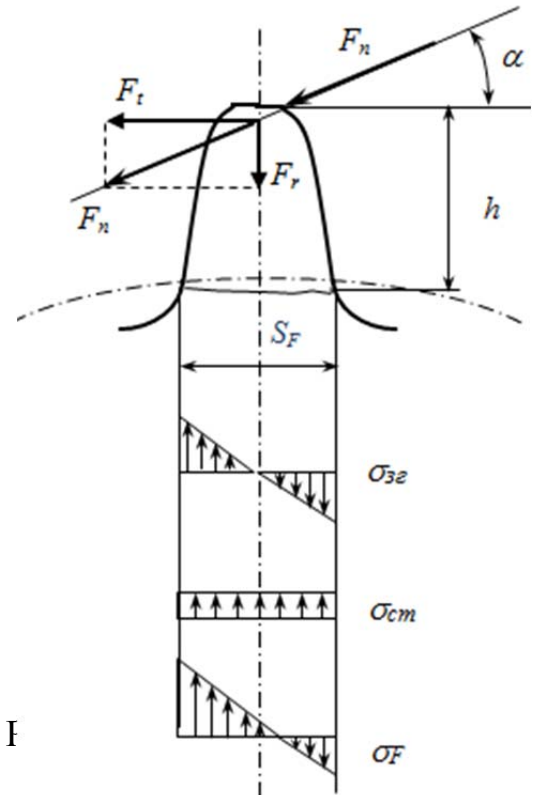


Рис. 2.52. Схема напруженого стану у зубах передачі.

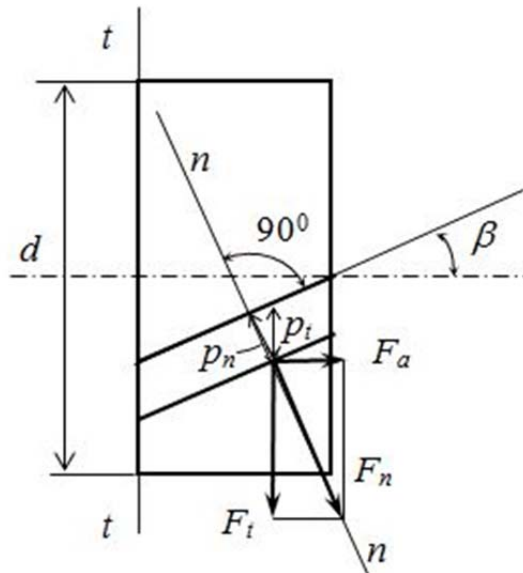


Рис.2.53. Схема розміщення зубів косозубого зубчастого колеса.

Профіль косоного зуба в нормальному перетині $n-n$ збігається з профілем прямого зуба (рис. 2.53). Модуль у цьому перетині повинний бути стандартним.

У торцьовому перетині $t-t$ параметри косоного зуба змінюються в залежності від кута β :

– коловий крок:
$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}, \quad (2.156)$$

– коловий модуль:
$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}, \quad (2.157)$$

– ділильний діаметр:
$$d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}. \quad (2.158)$$

Міцність зубів визначають його розміри і форма у нормальному перетині. Форму косоного зуба у нормальному перетині прийнято визначати через параметри еквівалентного прямозубого колеса.

Ділильний діаметр еквівалентного прямозубого колеса визначається таким чином:

$$d_v = \frac{d}{\cos^2 \beta}. \quad (2.159)$$

Число зубів еквівалентного прямозубого колеса розраховується за формулою:

$$z_v = \frac{d_v}{m_n} = \frac{z}{\cos^3 \beta}. \quad (2.160)$$

Збільшення еквівалентних параметрів зі збільшенням кута β є однією з причин підвищеної міцності косозубих передач. Унаслідок нахилу зубів виходить ніби колесо збільшує розмір або при тому ж навантаженні зменшуються габарити передачі. Крім цього, косозубі зубчасті передачі забезпечують більш плавну роботу та менший шум, тому у сучасних передачах косозубі колеса мають переважне поширення.



Питання для самоконтролю

1. Вкажіть види зубчастих передач.
2. Перелічіть переваги і недоліки зубчастих передач.
3. Назвіть геометричні характеристики зубчастого колеса.
4. Як визначається модуль?
5. Чи можуть мати різний модуль шестерня і колесо в одній парі зубчастих коліс?
6. Який кут зачеплення прийнятий в Україні для стандартних зубчастих коліс, нарізаних без зсуву?
7. Що називається корегуванням?
8. Як визначається передатне відношення у зубчастій передачі?
9. Як регламентується точність зубчастих коліс?
10. Для чого у зубчастій передачі передбачається бічний зазор?
11. Які сили виникають у зоні контакту зубів?
12. Чим відрізняються при роботі косозубі зубчасті передачі від прямозубих?
13. Поясніть методику проектного розрахунку зубчастій передачі.

2.2.6. Черв'ячні передачі

Черв'ячна передача є зубчато-гвинтовою, складається з черв'ячного (косозубого) колеса з зубами спеціальної форми і черв'яка - гвинта з трапецеїдальною різьбою. Вона застосовується для передачі обертання між валами, геометричні осі яких перехрещуються (рис. 2.54).

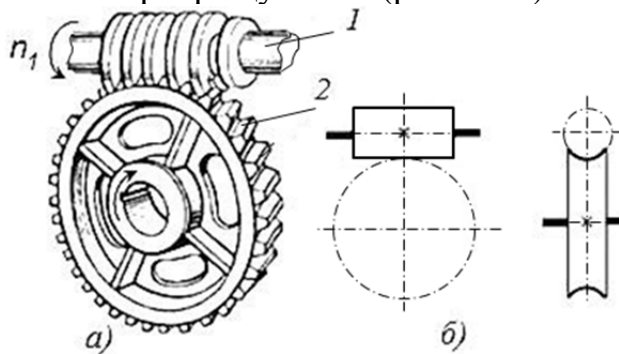


Рис. 2.54. Загальний вигляд (а) та умовне позначення на кінематичних схемах (б) черв'ячної передачі: 1- черв'як; 2 – черв'ячне колесо.

До переваг черв'ячних передач відносять:

- велике передатне відношення ($u = 10 \dots 80$ – у силових передачах і до 300 – у кінематичних передачах);
- плавність та безшумність роботи;
- висока кінематична точність;
- самогальмування.

Недоліки черв'ячних передач:

- низький ККД;
- підвищене зношення та заїдання;
- використання високовартісних матеріалів;

– високі вимоги до точності складання.

Для забезпечення зачеплення крок черв'яка має дорівнювати коловому крокові черв'ячного колеса. Черв'як, як і звичайний гвинт, може бути одно- і багатозаходний. Якщо повернути однозахідний черв'як на один оборот, то пов'язане з ним черв'ячне колесо повернеться на кут, відповідний одному кроку; при двозахідному черв'яку поворот буде дорівнює куту, відповідному двом крокам, і т. п. Отже, передавальне відношення черв'ячної передачі виражається через відношення числа зубів колеса до числа заходів різьби на черв'яка, тобто

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_{13}}. \quad (2.161)$$

де z_{13} , z_2 – відповідно кількість заходів черв'яка та кількість зубів черв'ячного колеса.

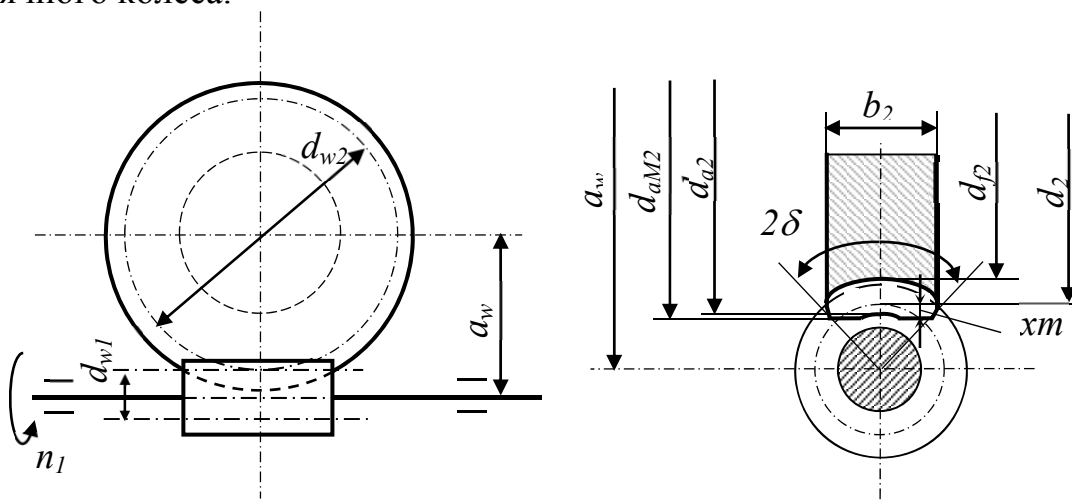


Рис. 2.55. Геометричні параметри черв'ячної передачі.

У черв'ячній передачі (рис. 2.55), так само як і в зубчастій, розрізняють діаметри початкових (d_{w1} , d_{w2}) та ділільних (d_1 , d_2) циліндрів. У передачах без зсуву $d_{w1}=d_1$, $d_{w2}=d_2$.

Черв'яки розрізняють:

- 1) за формою твірної:
 - циліндричні;
 - глобоїдні;
- 2) за формою профілю різьби:
 - прямолінійний (трапецеїдальний або Архімедів – найбільш поширений; $HV \leq 350$, нешліфований, виготовляється на звичайних верстатах);
 - криволінійний (евольвентний, $HRC > 45$, шліфований, виготовляється на спеціальних верстатах).

Черв'ячне колесо нарізують черв'ячними фрезами.

Геометричні параметри черв'ячної передачі (рис. 2.55):

$\alpha=20^0$ – профільний кут;

$m = \frac{p}{\pi}$ – осьовий модуль ;



$z_{1,3} = 1, 2, 4$ – число заходів черв'яка ;

z_2 – число зубів колеса (за умови не підрізування зубів $z_2 \geq 28$);

$q = \frac{d_1}{m}$ – коефіцієнт діаметру черв'яка ;

$\gamma = \arctg \frac{z_1}{q}$ – кут підйому гвинтової лінії.

Ділильні діаметри:

черв'яка $d_1 = qm$ (2.162)

колеса $d_2 = z_2 m$. (2.163)

Діаметр вершин $d_a = d_1 + 2m$. (2.164)

Діаметр западин $d_f = d_1 - 2,4m$ (2.165)

Міжосьова відстань. $a_w = 0,5(q + z_2)m$ (2.166)

Для нарізування коліс із зсувом та без зсуву на практиці використовують один і той самий інструмент. Черв'як завжди нарізують без зміщення. При заданій міжосьовій відстані коефіцієнт зсуву дорівнює:

$$x = \frac{a_w}{m} - 0,5(q + z_2). \quad (2.166)$$

У черв'ячного колеса із зсувом:

$$d_{a_2} = (z_2 + 2 + 2x)m, \quad (2.167)$$

$$d_{f_2} = (z_2 - 2,4 + 2x)m. \quad (2.168)$$

За умови не підрізування та не загострення зубів значення x на практиці допускають у межах $\pm 0,7$ (іноді ± 1).

Точність виготовлення регламентується 12 ступенями точності:

- 3, 4, 5, 6 – високоточні кінематичні;
- 5, 6, 7, 8, 9 – силові.

Особливе значення приділяють нормам точності при монтажу, тому що черв'ячні передачі більш чутливі до зміни a_w .

У черв'ячній передачі, на відміну від зубчастої, колові швидкості v_1 та v_2 не співпадають. Вони напрямлені під кутом 90° та відрізняються за значеннями. У відносному русі початкові циліндри ковзають.

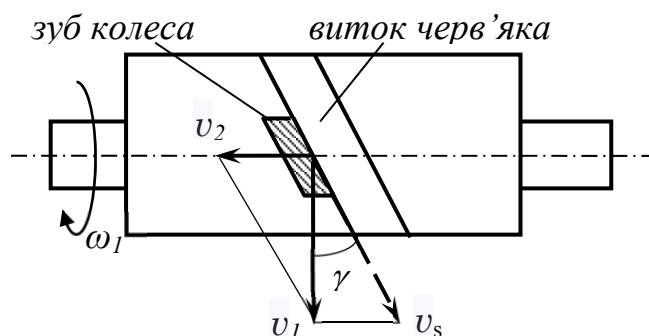


Рис. 2.56. Схема визначення швидкості ковзання.

При русі витки черв'яка ковзають по зубцях колеса, як у гвинтовій парі. Швидкість ковзання v_s напрямлена за дотичною до гвинтової лінії черв'яка:

$$\bar{v}_s = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \quad (2.169)$$

$$v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1}{\cos \gamma}, \quad (2.170)$$

$$v_1 = \frac{\pi \cdot d_1 \cdot n_1}{60}, \quad (2.171)$$

$$v_2 = \frac{\pi \cdot d_2 \cdot n_2}{60}, \quad (2.172)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \operatorname{tg} \gamma. \quad (2.173)$$

Ковзання – причина зниженого ККД, підвищеного зношення та заїдання у передачі. ККД зачеплення при ведучому черв'яку визначається:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \varphi)}, \quad (2.174)$$

де φ – кут тертя,
 f – коефіцієнт тертя ($\operatorname{tg} \varphi = f$).

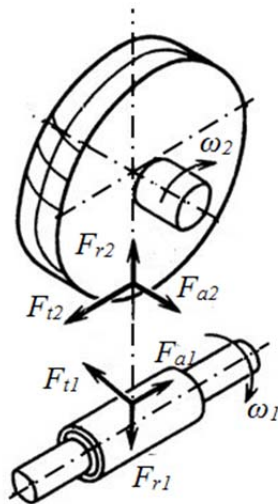


Рис. 2.57. Сили, що діють у черв'ячному зачепленні.

ККД підвищується у разі збільшення числа заходів черв'яка. Зі збільшенням швидкості ковзання знижується f . Значення коефіцієнту тертя також залежить від шорсткості поверхонь тертя і якості масла. Для зменшення тертя та покращення відведення тепла від зон контакту вінець черв'ячного колеса виконують зазвичай із бронзи.

Схема сил у зачепленні черв'ячної передачі показані на рисунку 2.57.

Колова сила черв'яка: $F_{t1} = F_{a2} = \frac{2T_1}{d_1}. \quad (2.175)$

Колова сила колеса: $F_{t2} = F_{a1} = \frac{2T_2}{d_2}. \quad (2.176)$

Радіальна сила: $F_r = F_{t2} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.177)$



$$\text{Нормальна сила:} \quad F_n = \frac{F_{t2}}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}. \quad (2.178)$$

Слід відмітити, що на черв'яку та колесі виникають значні осьові зусилля F_{a1} та F_{a2} . Останні необхідно враховувати при конструюванні опор валу черв'яка та черв'ячного колеса.

Основою розрахунку зубчастого зачеплення є умова забезпечення допустимих контактних напруг на зубцях черв'ячного колеса. Стійкість проти втомлюваного викришування та проти заїдання активних поверхонь зубців черв'ячного колеса забезпечується при виконанні загальної умови за формулою Герца:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{W_n E_{np}}{\rho_{np}}} \leq [\sigma_n], \quad (2.179)$$

де W_n – питома розрахункова колова сила, що визначається за формулою:

$$W_n = \frac{F_n K}{\ell_\Sigma}, \quad (2.180)$$

K – коефіцієнт навантаження, що враховує режим роботи (при спокійному навантаженні передачі $K = 1$);

ℓ_Σ – сумарна довжина контакту між зубами у передачі.

Допустимі контактні напруги $[\sigma_n]$ залежать від здатності матеріалу зубів вінця до опору контактній втомлюваності матеріалу, на яку значно впливає швидкість ковзання.

Після перетворень отримують залежність:

$$\sigma_n = \frac{5400(q+2x)}{z_2} \sqrt{\left[\frac{z_2 + q + 2x}{(q+2x)a_w} \right]^3 KT_2} \leq [\sigma_n]. \quad (2.181)$$

При проведенні проектного розрахунку з формули (2.181) визначають міжосьову відстань (попередньо приймають $x=0$):

$$a_w = \left(\frac{z_2}{q} + 1 \right) \sqrt[3]{\left(\frac{5400q}{z_2 [\sigma_n]} \right)^2 KT_2}. \quad (2.182)$$

Так як, на першому етапі розрахунку q та z_2 невідомі, то в першому наближенні приймають $q=0,25 z_2$, тоді (2.182) спрощується до вигляду:

$$a_w \approx 610 \sqrt[3]{\frac{KT_2}{[\sigma_n]^2}}. \quad (2.183)$$

За отриманою міжосьовою відстанню призначають стандартне значення модуля у межах $m=(1,4 \dots 1,7) \cdot a_w / z_2$. Визначають розміри елементів передачі та перевіряють співвідношення (2.181). За необхідності збільшують модуль.

Завершується розрахунок перевіркою міцності зубів вінця на згин:

$$\sigma_F = \frac{F_{t2} K \cos \gamma Y_F}{1,3 m^2 (q+2x)} \leq [\sigma_F] \quad (2.184)$$

Для черв'ячних передач обов'язково виконують тепловий розрахунок. Якщо відведення теплоти недостатнє, передача перегрівається та виходить з ладу. Кількість теплоти, що виділяється у передачі за секунду (теплова потужність), обчислюється за формулою:

$$Q = N_1(1 - \eta), \quad (2.185)$$

де N_1 – потужність на вхідному валу, Bm ;
 η – ККД передачі.

Кількість теплоти, що віддається навколишньому простору через стінки корпусу за секунду (потужність тепловіддачі), розраховується таким чином:

$$Q_1 = k(t_1 - t_0)A, \quad (2.186)$$

де A – площа поверхні охолодження, m^2 (лише та частина поверхні корпусу редуктора, яка з середини омивається мастилом чи його бризками, а зовні – вільно циркулюючим повітрям, якщо корпус має ребра, враховують лише 50% площі їх поверхні);

t_1 – внутрішня температура редуктора чи масла, $^{\circ}C$ (допустиме значення залежить від сорту масла, його здатності зберігати мастильні властивості при підвищенні температури);

t_0 – температура навколишнього середовища, $^{\circ}C$;

k – коефіцієнт теплопередачі, $\frac{Bm}{m^2 \cdot ^{\circ}C}$ ($k \approx 8..10 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^{\circ}C}$ – без вентиляції, $k \approx 14..17 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^{\circ}C}$ – з інтенсивною вентиляцією).

Умова достатнього природного охолодження:

$$Q \leq Q_1. \quad (2.187)$$

Для інтенсифікації охолодження використовують такі способи:

1. Обдув корпусу за допомогою вентилятора (k збільшується до $20..28 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^{\circ}C}$, якщо поверхня, виготовлена з ребрами).

2. Створення в корпусі водяних порожнин чи змієвиків з проточною водою (k збільшується до $90..200 \frac{Bm}{m^2 \cdot ^{\circ}C}$ при швидкості води до $1m/c$).

3. Застосування циркуляційних систем змашування зі спеціальними холодильниками.

У перших двох випадках, а також при природному охолодженні, змашування здійснюється шляхом часткового занурення одного з коліс або черв'яка у мастильну ванну. Для запобігання великих втрат на розбризкування та змішування мастила, а також щоб масло не спінювалось, глибина занурення коліс не повинна перевищувати висоти зубу для швидкохідних коліс або витка черв'яка, для тихохідних коліс - на $1/3$ радіуса.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягають переваги і недоліки черв'ячних передач.
2. Чому черв'ячні передачі не рекомендують використовувати для передавання великих навантажень?
3. Що таке «число заходів черв'яка»? Як визначається ця характеристика?
4. Для чого передбачають регулювання зачеплення? Як його здійснюють?
5. З чим пов'язане підвищене ковзання у черв'ячній передачі? Як воно впливає на роботу передачі?



6. Як співвідносяться сили, що діють на черв'як і черв'ячне колесо?
7. Які матеріали використовують для виготовлення черв'яка і черв'ячного колеса? Які фактори впливають на вибір матеріалів?
8. Як обчислюють ККД передачі? Які основні фактори впливають на величину ККД?
9. Поясніть методику проектного розрахунку черв'ячної передачі.

2.2.7. Редуктори

Редуктор — це механізм як окремий агрегат, у закритому корпусі якого змонтовані передачі зачепленням, призначений для зміни параметрів обертового руху — зменшення кутової швидкості і відповідно збільшення обертового моменту. Редуктор із ступінчастою зміною передатного відношення називається коробкою передач, з без ступінчатої — варіатор.

У відповідності з ДСТУ 2280-93 «Редуктори зубчасті. Загальні технічні умови» до редукторів загальномашинобудівного призначення відносяться:

- циліндричні одно-, дво- і триступінчасті;
- циліндричні планетарні одно- і двоступінчасті;
- конічні одноступінчасті;
- конічно-циліндричні дво- і триступінчасті;
- черв'ячні і глобоїдні одно- і двоступінчасті;
- черв'ячно-циліндричні двоступінчасті.

Робочі характеристики редукторів кожного типу визначаються такими основними параметрами:

- передатним відношенням (частотою обертання вихідного вала) – кінематичною характеристикою редуктора;
- обертовим моментом та допустимим консольним навантаженням на вихідному валу – силовою характеристикою редуктора;
- коефіцієнтом корисної дії (ККД).

При невеликих загальних передатних відношеннях застосовують одноступінчасті циліндричні редуктори (рис. 2.58,а) з передатними рекомендованими числами до 6,3 (граничними до 10).

За необхідності взаємної перпендикулярності вхідного і вихідного валів і невеликому передатному відношенні застосовують одноступінчасті конічні редуктори з передатними числами до 5 (6,3).

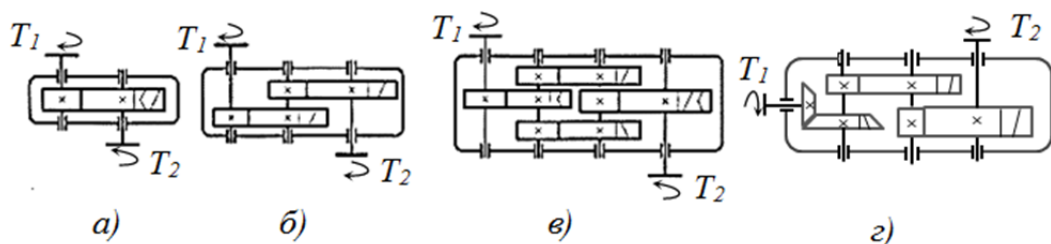


Рис. 2.58. Схеми циліндричного (а,б,в) та комбінованого, конічно-циліндричного (г) редукторів.

Для багатоступеневих редукторів загальне передатне відношення визначається:

$$u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots, \quad (2.188)$$

де u_1, u_2, u_3 – передатні відношення відповідно першої другої та подальших передач.

Слід пам'ятати, що передатні відношення зубчастих передач стандартизовані. Загальний ККД редуктора визначиться:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \cdot \eta_n \cdot \eta_{\text{ущ}} \cdot \eta_m, \quad (2.189)$$

де η_1, η_2, η_3 – ККД відповідно першої другої та подальших передач;

η_n – ККД опор валів;

$\eta_{\text{ущ}}$ – ККД ущільнень;

η_m – ККД опору розбризкування масла.

На рисунку 2.59 показаний загальний вигляд та креслення одноступінчастого циліндричного редуктора. Деталі редуктора монтуються у чавунний корпус, що складається з основи 2 і кришки 6. Корпус служить для розміщення і закріплення деталей редуктора, сприйняття виникаючих при роботі зусиль, змащення і захисту деталей від забруднення. Корпусні деталі з метою збільшення міцності, а також збільшення поверхні охолодження, якщо це потрібно, забезпечуються ребрами.

Поверхні корпусу і кришки, що дотикаються, піддаються чистовій обробці. Їх гарне прилягання забезпечує герметичність стику. При цьому усуваються витіки масла. Точна взаємна установка корпусу і кришки забезпечується фіксуєчими штифтами.

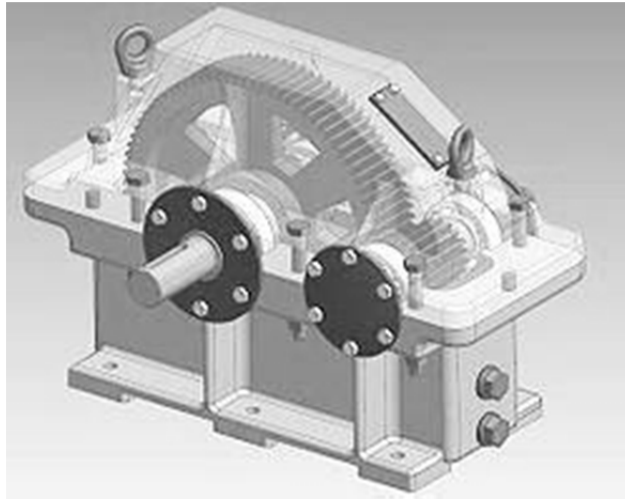
Корпус і кришка стягуються при складанні болтами 3 з гайками і шайбами, а при розбиранні відокремлюються одне від одного за допомогою віджимних гвинтів. Днище корпусу зазвичай має нахил $1 - 2^\circ$ у бік отвору, через який відбувається зливання масла з редуктора при його заміні. Зливальний отвір закривають пробкою 13 із прокладкою з пароніту, маслобензостійкої гуми чи з м'якого металу (мідь, алюміній).

Для заливання масла в редуктор, а також контролю стану передач, у верхній частині кришки передбачається оглядовий отвір, що закривається кришкою 8, на якій, зазвичай, закріплюють віддушину 7 з фільтруючими прокладками чи без них.

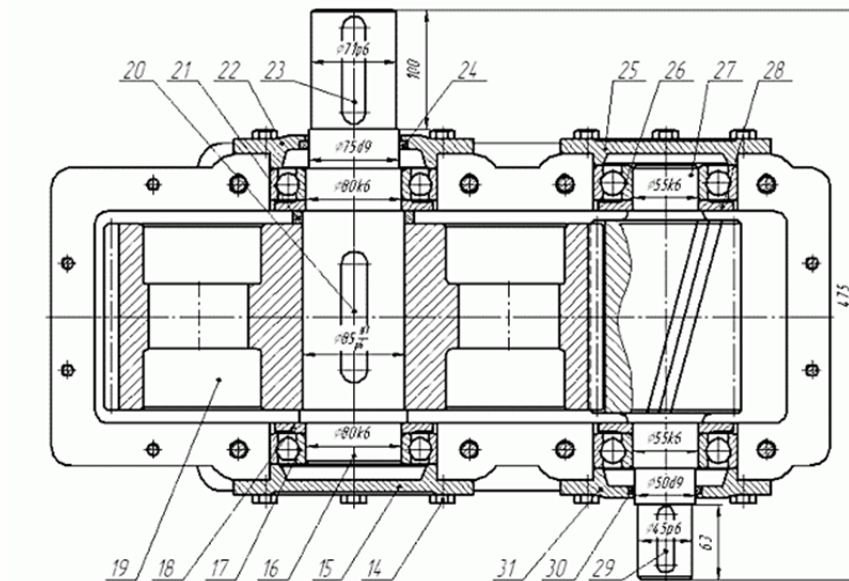
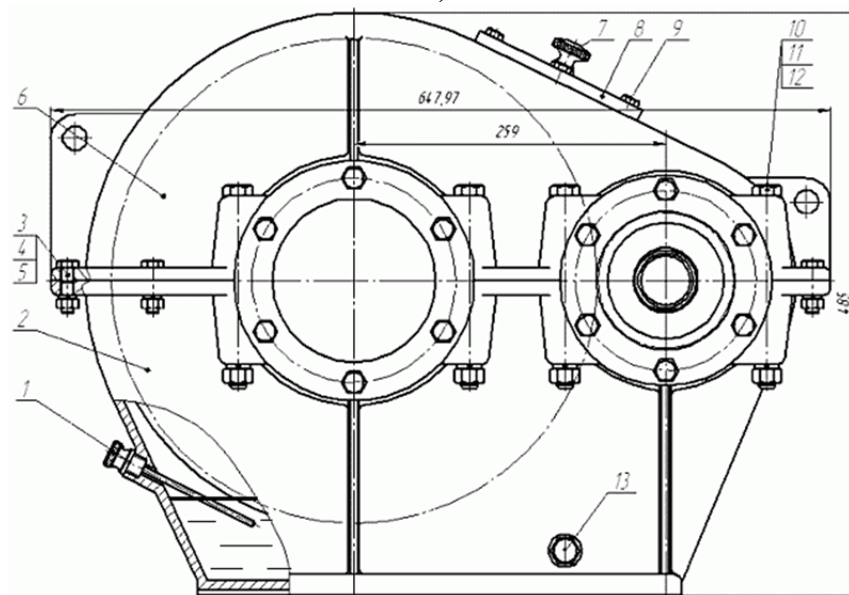
Віддушину дозволяє уникнути підвищення тиску усередині редуктора при його нагріванні під час роботи. Завдяки цьому зменшується імовірність витіку масла через ущільнювачі валів 24 та 30 і площину рознімання. Контроль рівня масла, що заливається в кратер, здійснюється за допомогою трубчастого жезлового показника 1.

Опорами валів у розглянутому редукторі є вальниці кочення 17, 26. Отвори під вальниці закриті наскрізними 22, 31 та глухими 15, 25 кришками. Ці кришки служать також для регулювання зазорів у вальницях. У наскрізних кришках поміщені ущільнення 24, 30. Для передач крутного моменту з валу на колесо (чи в зворотному напрямку) служать шпонки 20, 23. В осьовому напрямі колеса фіксуються буртиками на валах і розпірними втулками 18, 21.

Транспортування корпусних деталей, а також редуктора у зборі здійснюється за допомогою вушок, що відливаються разом з корпусними деталями.



а)



б)

Рис. 2.59. Одноступінчастий циліндричний редуктор: загальний вигляд(а), креслення(б).

Черв'ячні редуктори. Найпоширеніші у вжитку є одноступінчасті черв'ячні редуктори. Діапазон їхніх передатних відношень 8...63(90). Редуктори виконуються з відносним розміщенням черв'яка і колеса за чотирма схемами.

1) Черв'як розміщений під черв'ячним колесом (рис. 2.60, а). Така схема застосовується при колових швидкостях черв'яка до 4,5м/с, допускає передачу великої потужності за критерієм нагріву, має добрі умови охолодження і змащення. Недоліки – можливість потрапляння продуктів спрацювання в зону контакту черв'яка з колесом і витікання масла.

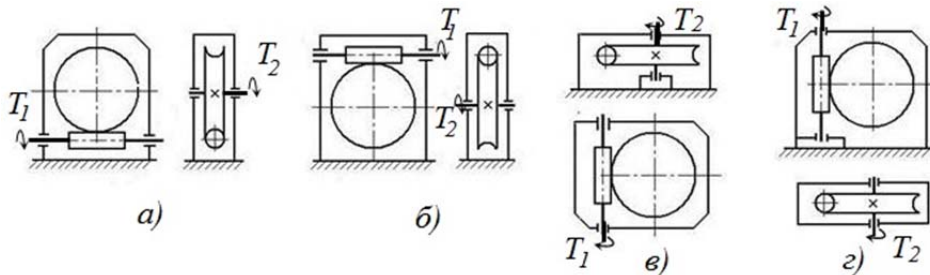


Рис. 2.60. Схеми черв'ячних редукторів.

2) Черв'як – над колесом (верхнє розміщення черв'яка, рис. 2.60, б) – застосовують у швидкохідних передачах. Переваги – зменшення втрат на розбризування масла і неможливість попадання продуктів спрацювання в зону контакту. Недолік – погіршення умов охолодження.

3) Черв'як з горизонтальною віссю контактує з колесом, що має вертикальну вісь (рис. 2.60, в);

4) Черв'як з вертикальною віссю контактує з колесом, яке має горизонтальну вісь (рис. 2.60, г).

Застосування схем в і г обумовлене компоновкою приводу. Недоліки – трудність змащення верхніх цапф валів і утримання масла від витікання.

Конструкція черв'ячного редуктора показана на рисунку 2.61. Редуктор складається з корпусу 1 і кришки 2, які з'єднані болтами 3. Корпус і кришку виконують литими з чавуну або алюмінієвих сплавів. Обертальний рух від швидкохідного валу - черв'яка 4 до тихохідного валу 5 передається черв'ячним колесом 6, який кріпиться на валу за допомогою шпонки. Черв'як виконаний спільно з валом. Вали встановлені в корпусі редуктора на конічних роликових вальницях 7 і 8.

Накладні кришки 9 і стакани 10 кріпляться до корпусу за допомогою болтів 11 і 12. У кришках і стаканах встановлені манжети 13 і 14. До валу черв'яка 4 гвинтом 15 кріпиться крильчатка 16, яка служить для охолодження редуктора. До корпусу редуктора під'єднаний кожух крильчатки 17. Пружинне кільце 18 утримує черв'ячне колесо від осьового зміщення. Масло редуктора заливається у картер, його рівень контролюється маслопоказчиком 19 з віддушиною 20. Отвір під маслопоказчик використовується для заливки масла. Злив масла здійснюється через зливний отвір, що закривається пробкою 21.

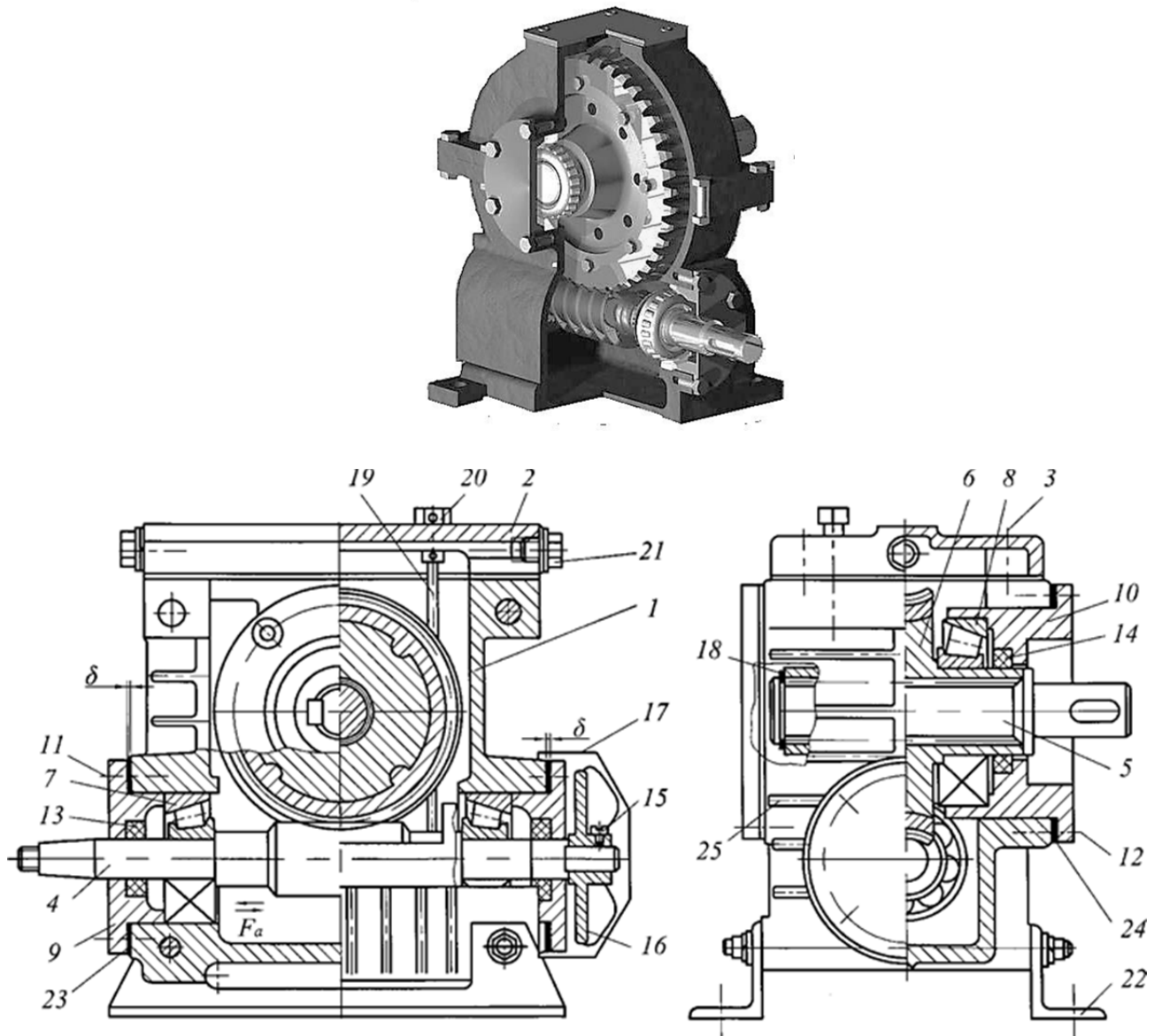


Рис. 2.61. Черв'ячний редуктор

До корпусу редуктора 1 кріпляться з'ємні лапи 22. Охолодження редуктора відбувається обдуванням повітрям за допомогою крильчатки. Поліпшенню тепловідводу сприяють ребра 25 корпусу.

Для усунення витoku масла і попадання всередину редуктора пилу і бруду у наскрізних кришках опор редуктора встановлюють ущільнення. Найчастіше застосовують ущільнення типу манжета.

Основний спосіб змащення черв'ячного зачеплення - занурення черв'яка або колеса в масляну ванну картера редуктора. Масляна ванна повинна мати достатню місткість, щоб уникнути швидкого старіння масла, переміщення продуктів зношення і конденсату у зачеплення та опори валів. При нижньому розташуванні черв'яка рівень масла зазвичай призначають з умови повного занурення витків черв'яка. Рівень масла при верхньому розташуванні черв'яка визначають з умови повного занурення зубу черв'ячного колеса.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть класифікацію редукторів загальномашинобудівного призначення.
2. Вкажіть стандартні показники, що характеризують робочі характеристики редуктора.
3. Як визначають передатне відношення та ККД багатоступеневого редуктора?
4. Опишіть будову циліндричного редуктора.
5. Як здійснюється мащення зубчастих коліс у редукторі?
6. Для чого потрібна віддушину?
7. Призначення і область використання черв'ячних редукторів.
8. На які види поділяють черв'ячні редуктори за розміщенням вісі черв'яка?
9. Вкажіть найбільш поширені схеми черв'ячних редукторів, їх переваги та недоліки.
10. Опишіть конструкцію черв'ячного редуктора.
11. Чому в опорах валів черв'ячних редукторів використовують конічні роликові вальниці?

2.2.8. Ланцюгові передачі

Ланцюгова передача (рис. 2.62) складається з ведучої 1 та веденої 3 зірочок, що розміщені на відповідних валах, і ланцюга 2 у вигляді замкненого контуру, який знаходиться у зачепленні із зірочками. За аналогією з пасовими передачами вільний відрізок I ланцюга, що набігає на ведучу зірочку 1, називається ведучою гілкою, а другий вільний відрізок II ланцюга — веденою.

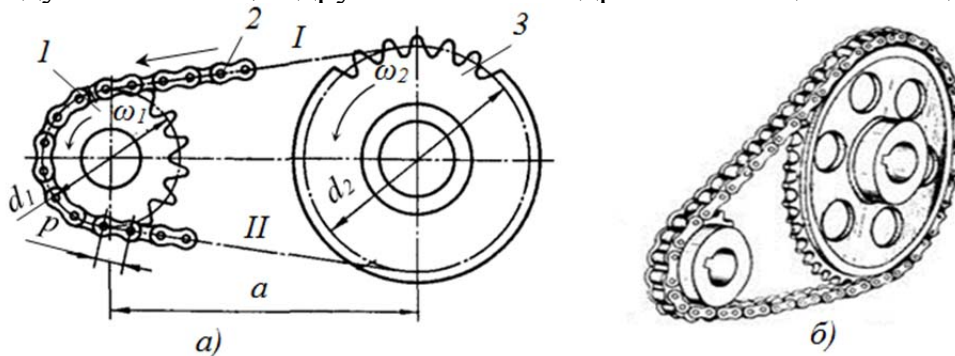


Рис. 2.62. Схема (а) та загальний вигляд ланцюгової передачі (б).

Ланцюг складається із з'єднаних шарнірами ланок, що забезпечує гнучкість ланцюга. За рахунок зачеплення ланцюга із зубцями зірочок забезпечується передавання обертового руху від ведучої зірочки до веденої без проковзування.

Швидкість руху ланцюга у передачах загального призначення досягає 15 м/с при потужності до 100 кВт, а у спеціальних приводах — до 35 м/с при потужності до 2000 кВт. За допомогою ланцюгової передачі можна забезпечити передатне число $u \leq 10$, а найраціональніше мати $u \leq 4$.



Ланцюгові передачі порівняно з іншими механічними передачами мають такі основні переваги:

- можливість використання при значних відстанях між валами;
- достатньо високий ККД, який досягає 0,96... 0,97;
- можливість передавання обертового руху одним ланцюгом кільком валам, у тому числі і з протилежним напрямом обертання.

До недоліків ланцюгових передач належать такі:

- збільшення довжини ланцюга через спрацювання шарнірів і відповідне ослаблення потрібного натягу;
- нерівномірність руху ланцюга і пов'язані з цим динамічні явища у передачі та підвищений шум;
- низька кінематична точність при реверсуванні;
- потреба застосування додаткових пристроїв для регулювання натягу ланцюга.

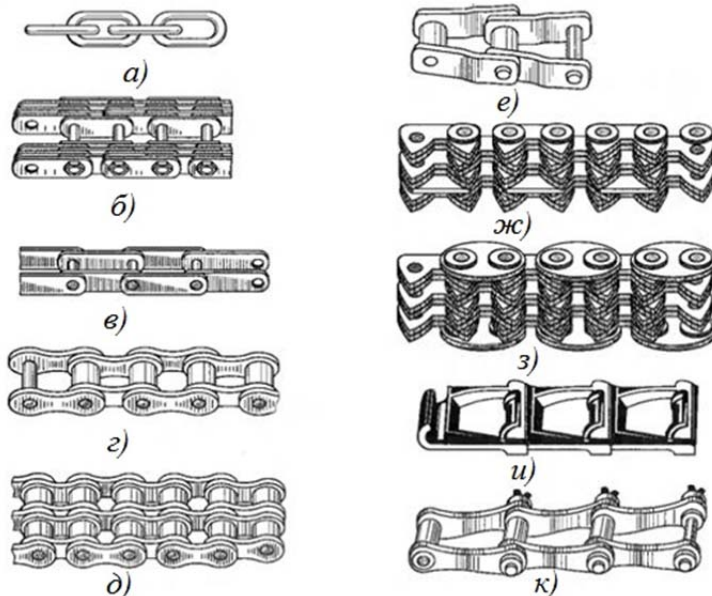


Рис.2.63. Види ланцюгів:

а - вантажний круглозвенний , б - вантажний пластинчастий шарнірний; в - тяговий пластинчастий; роликові: (однорядний (з), двохранний (д), із зігнутими пластинами (е)); зубчасті: (із внутрішніми (ж) та бічними направляючими (з)); фасоззвенні: (крючковаті (и), втулково-штирьові (к)).

Ланцюги за призначенням поділяють на три групи (рис. 2.63):

- вантажні - використовують для підвішування, піднімання та опускання вантажів;
- тягові - застосовують для переміщення вантажів в машинах безперервного транспорту (конвеєрах, підйомниках, ескалаторах та інші);
- приводні - використовують для передачі обертового руху.

Приводні ланцюги за конструкцією бувають: роликові, втулкові та зубчасті. У ланцюгових передачах найбільше використовують роликові та зубчасті ланцюги.

Роликовий ланцюг (рис. 2.64) складається з ланок двох типів: зовнішніх *I* та внутрішніх *II*. Пластини внутрішньої ланки напресовані на втулки 4 і утворюють нерухоме з'єднання. Валик 3 вільно входить у втулку і утворює шарнір. Зовнішні пластини напресовані на валики, які на торцях розвальцьовані. Ролик 5 на втулці 4 може вільно обертатись при вході у зачеплення із зубцями зірочки. У рухомих з'єднаннях втулки з валиком і роликом має місце тертя ковзання, у спряженні роликів із зубцями зірочок переважає тертя кочення.

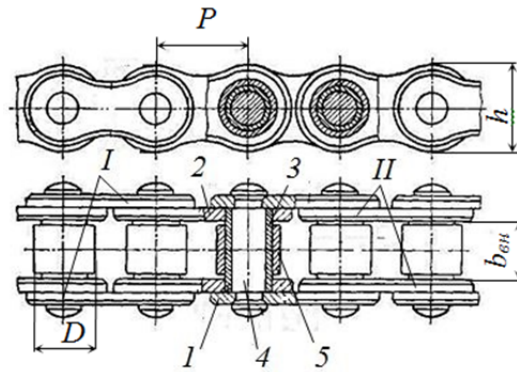


Рис. 2.64. Будова роликового ланцюга:

1 — пластина зовнішньої ланки; *2* — пластина внутрішньої ланки;
3 — втулка; *4* — валик; *5* — ролик.

Основною геометричною характеристикою ланцюга є крок P - відстань між осями сусідніх шарнірів. Більшість стандартних ланцюгів мають крок, кратний 1 дюйму (25,4 мм). Серед інших розмірних параметрів ланцюгів, що характеризує міцність та довговічність, це площа опорної поверхні шарніру $A_{оп}$, яка дорівнює добутку діаметру валика і ширини внутрішньої ланки.

Характеристикою міцності роликового ланцюга є руйнівне навантаження $F_{РН}$, яке визначається дослідним шляхом на підприємствах, що виготовляють ланцюги. Воно регламентується стандартом.

Зубчастий ланцюг (рис. 2.63, *ж* і *з*) складається з набору пластин двох типів. Основні пластини мають зовнішні бічні плоскі поверхні, якими вони спрягаються з двома зубцями зірочки. Напрямні пластини забезпечують центрування ланцюга відносно зірочок. Для цих пластин посередині вінця зірочок передбачається відповідний проміжок. Зубчасті ланцюги, у порівнянні з роликовими, допускають дещо більш високі швидкості, вони більш плавні та безшумні у роботі, мають підвищену надійність через багатопластинчасту конструкцію. Однак вони мають більшу масу, складніші у виготовленні і дорожчі. Тому зубчасті ланцюги застосовують обмежено.

Натяг ланцюга у ланцюговій передачі повинен відповідати корисному навантаженню. Надмірний натяг погіршує набігання ланцюга на зірочки, збільшує спрацювання ланцюга та зубців зірочок, підвищує навантаження на опори валів передачі. Малий натяг спричинює значне провисання веденої гілки, що створює умови для пробуксовування ланцюга на зірочках або його сходу із зірочок.



Потрібний натяг гілок оцінюють стрілкою провисання f веденої гілки передачі. Для передач із кутом нахилу до горизонту до 40° стрілка провисання $f \leq 0,02a$, а для передач із кутом нахилу більше від 40° $f \leq 0,015a$, де a — міжосьова відстань передачі.

Регулювання натягу ланцюга здійснюється пристроями, аналогічними тим, що використовуються у пасових передачах, тобто переміщенням валу однієї із зірочок, натяжними або відтяжними гвинтами. У деяких випадках застосовують підпружинені натяжні колодки або ролики. Недоліками таких пристроїв є додатковий згин ланцюга, який прискорює його спрацювання, та невідповідність натягу ланцюга його корисному навантаженню при змінних режимах роботи.

Швидкість ланцюга та кутові швидкості зірочок обмежуються інтенсивністю спрацювання ланцюга, силою удару шарнірів об зубці зірочок, а також шумом передачі. У більшості випадків швидкість ланцюга не повинна бути більшою ніж 15 м/с. Інколи, при малих кроках ланцюга та великому числі зубців при доброму змащуванні допускається швидкість ланцюга 30—35 м/с. Середню швидкість ланцюга визначають за формулою:

$$v = \frac{P\omega_1 z_1}{2\pi} \quad (2.190)$$

де P — крок ланцюга;

ω_1 — кутова швидкість ведучої зірочки (з числом зубців z_1).

Кутову швидкість зірочок обмежують, щоб зменшити удар шарнірів ланцюга об зубці. Граничні рекомендовані кутові швидкості меншої зірочки залежать від числа зубців z_1 та кроку ланцюга P , вони приводяться у характеристиках ланцюгів.

Передатне число визначається з умови рівності середньої швидкості ланцюга на ведучій та веденій зірочках: $P \omega_1 z_1 / (2\pi) = P \omega_2 z_2 / (2\pi)$, звідки передатне число ланцюгової передачі:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.191)$$

Передатне число обмежується габаритними розмірами передачі, кутом обхвату меншої зірочки та числами зубців зірочок. Найдоцільніше брати $u \leq 4$.

Мінімальне число зубців зірочок обмежується спрацюванням шарнірів, динамічними навантаженнями та шумом передачі. Число зубців меншої зірочки вибирають залежно від кроку P та її кутової швидкості.

При спрацюванні шарнірів крок ланцюга збільшується. При цьому ланцюг на зірочці буде розміщуватись на більшому радіусі. Збільшення радіусів розміщення шарнірів ланцюга на зубцях зірочки тим більше, чим менший кутовий крок зубців $2\pi/z$. При великому z навіть невелике збільшення кроку ланцюга спричинює значне зміщення ланцюга на профілях зубців. Це зміщення обмежує максимальне число зубців зірочок, яке беруть 100—120 для роликових ланцюгів і 120—140 для зубчастих. Переважно вибирають непарне число зубців зірочок, що у поєднанні з парним числом ланок ланцюга сприяє рівномірному спрацюванню зубців.

Крок ланцюга P є основним параметром ланцюгової передачі. Ланцюги з великим кроком мають більшу несучу здатність, але обмежують кутову швидкість меншої зірочки, сприяють збільшенню нерівномірності руху, динамічних навантажень та шуму ланцюгової передачі. Тому доцільно вибирати ланцюг із мінімально допустимим для заданого навантаження кроком. При конструюванні та розрахунку ланцюгової передачі можна зменшити крок зубчастих ланцюгів, збільшивши ширину ланцюга, а крок роликів ланцюгів — використавши багаторядні ланцюги.

У проєктному розрахунку ланцюгової передачі орієнтовне значення кроку P , мм, однорядного роликівого ланцюга можна визначити за формулою:

$$P = 13 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1}{z_1}}, \quad (2.192)$$

де T_1 — крутний момент на валу ведучої зірочки, Hm ;
 z_1 — число зубців ведучої зірочки.

Мінімальну міжосьову відстань ланцюгової передачі визначають за умови, що кут обхвату ланцюгом малої зірочки повинен бути не менш ніж 120° .

При $u \leq 3$

$$a_{min} = 0,5 (d_{e1} + d_{e2}) + (30...50), \quad мм \quad (2.193)$$

при $u > 3$

$$a_{min} = (d_{e1} + d_{e2}) (9 + u)/20. \quad мм \quad (2.194).$$

Тут d_{e1} , d_{e2} , — діаметри вершин зубців ведучої та веденої зірочок відповідно. Оптимальна міжосьова відстань ланцюгової передачі $a = (30...50)P$. Не рекомендують брати $a > 80P$.

Число ланок W ланцюга визначають за попередньо вибраною міжосьовою відстанню a , кроком ланцюга P та числом зубців зірочок z_1 і z_2 :

$$W = \frac{2a}{P + 0,5(z_1 + z_2)} + \frac{\left(\frac{P}{a}\right) \cdot (z_2 - z_1)^2}{(2\pi)^2}. \quad (2.195)$$

Значення W слід заокруглити до найближчого парного числа. Після визначення числа ланок W ланцюга уточнюють міжосьову відстань передачі за формулою:

$$a = \left(\frac{P}{4}\right) \cdot \left[W - 0,5(z_1 + z_2) + \sqrt{(W - 0,5(z_1 + z_2))^2 - 8(z_2 - z_1)^2 / (2\pi)^2} \right]. \quad (2.196)$$

Щоб забезпечити оптимальне провисання ланцюга, значення a рекомендується зменшити на $(0,002...0,004) a$.

Довжина ланцюга визначається за формулою:

$$l = P \cdot W. \quad мм \quad (2.197)$$

Зусилля у гілках ланцюгової передачі визначають за величиною корисного навантаження, відцентрової сили та вагою ланцюга. Різниця між силами натягу ведучої F_1 і веденої F_2 гілок визначає корисне навантаження ланцюга:

$$F_t = F_1 - F_2 = 2 T_1 / d_1, \quad (2.198)$$

де T_1 — обертовий момент на валу ведучої зірочки, що має дільний діаметр d_1 .



Сила натягу F_2 веденої гілки ланцюга більша від сили натягу F_0 , спричиненого власною вагою гілки, та від натягу F_V , від дії відцентрової сили:

$$F_0 = K_f a q g, \quad F_V = q v^2, \quad (2.199)$$

де K_f — коефіцієнт провисання ланцюга, який залежить від стрілки провисання f веденої гілки та кута нахилу передачі до горизонту; якщо $f = 0,02a$, то для горизонтальної передачі $K_f = 6$ ($K_f = 4$ при куту нахилу до горизонту до 40° ; $K_f = 2$ при куту нахилу більшим від 40° ; $K_f = 1$ — для вертикальної передачі);

a — міжосьова відстань передачі, м;

q — маса 1 м ланцюга, кг/м;

g — прискорення вільного падіння, м/с²;

v — швидкість ланцюга, м/с.

Для поширених на практиці тихохідних передач та передач із середніми швидкостями ланцюга $v \leq 10$ м/с сила натягу веденої гілки незначна і складає кілька відсотків від корисного навантаження F_t . Тому у розрахунках із достатньою точністю можна брати $F_2 \approx 0$, а $F_1 \approx F_t$.

Сила, що передається на вали ланцюгової передачі, визначається:

$$R = 1,15F_t. \quad (2.200)$$

Розрахунок шарнірів ланцюга на стійкість проти спрацювання виконують за умови не перебільшення питомої сили, що діє на шарнір, допустимого значення для обраного ланцюга:

$$p_{num} = \frac{F_t K_{F_{cn}} K_\delta}{A_{on} K_m} \leq [p_{num}]_{cn}. \quad (2.201)$$

де $K_{F_{cn}}$ - коефіцієнт інтенсивності режиму навантаження;

K_δ - коефіцієнт динамічного навантаження ($K_\delta = 1$ - при спокійному навантаженні; $K_\delta = 1,3$ — при помірних змінах навантаження; $K_\delta = 1,5$ - при різких змінах навантаження);

A_{on} - площа опорної поверхні шарніру ланцюга;

K_m - коефіцієнт, що враховує число рядів ланцюга (для однорядного ланцюга $K_m = 1$; для дворядного - $K_m = 1,7$; для трирядного $K_m = 2,5$ і для чотирирядного $K_m = 3$);

$[p_{num}]_{cn}$ - допустимий тиск у шарнірі за умови стійкості його проти спрацювання.

При невиконанні умови (2.201) слід брати ланцюг більшого кроку або того самого кроку але двох - чи трирядний.

Розрахунок пластин ланок ланцюга на втому здійснюють за формулою:

$$p_{num.em} = \frac{F_t K_{F_{em}} K_\delta}{A_{on} K_m} \leq [p_{num.em}], \quad (2.202)$$

де $K_{F_{em}}$ - коефіцієнт впливу інтенсивності режиму навантаження на втомлювальну міцність;

$[p_{num.em}]$ - допустимий тиск у шарнірі за умови втомлювальної міцності пластин.

Розрахунок ланцюга на міцність при дії максимальних короточасних перевантажень виконують за умови, що

$$S = \frac{F_{p.n}}{F_{max}} \leq S_{min}, \quad (2.203)$$

де $F_{p.n}$ - руйнівне навантаження, яке задається у стандарті на приводні ланцюги;

F_{max} - максимальне короткочасно діюче навантаження ланцюга, яке може виникнути при роботі передачі протягом її терміну служби;

$S_{min} = 5$ - запас міцності ланцюга.

Питання для самоконтролю

1. Поясніть будову ланцюгової передачі.
2. Вкажіть основні переваги та недоліки ланцюгових передач.
3. Які ланцюги використовують у привідних ланцюгових передачах?
4. Поясніть конструкцію роликового ланцюга.
5. Вкажіть переваги та недоліки зубчастих ланцюгів.
6. Як визначається оптимальний натяг ланцюга?
7. Як розраховується передаточне відношення ланцюгової передачі і які його оптимальні межі?
8. Який геометричний параметр найбільш впливає на експлуатаційні характеристики ланцюгової передачі?
9. Поясніть методику розрахунку геометричних параметрів ланцюгової передачі.
10. Які сили визначають зусилля у гілках зубчастої передачі?
11. Як перевіряють шарніри ланцюга на стійкість проти спрацювання?

2.2.9. Вали та осі

Вали і осі - деталі, що несуть на собі обертові частини машини: зубчасті колеса, шків, зірочки і т. п. Вали та осі призначені для підтримування закріплених на них деталей і забезпечення їх постійного положення відносно інших частин машини.

Ось зазвичай являє собою суцільне або порожнисте ступеневу (рідше гладке) тіло циліндричної форми. Осі бувають обертові і нерухомі. Наприклад, вагонна ось разом з колесами обертається, а ось велосипеда нерухома, колесо обертається відносно неї.

Осі не передають крутного моменту і працюють лише на згин. Вали передають обертальний момент і тому працюють на згин та кручення.

У залежності від форми повздовжньої вісі вали поділяють на прямі колінчасті, гнучкі (тросові або у вигляді пружин). Колінчасті і гнучкі вали належать до спеціальних деталей.

За конструкцією розрізняють вали й осі: гладкі (рис. 2.65,а) та ступінчасті (рис. 2.65,б) (фасонні). Ступінчасті вали роблять для фіксації деталей в осьовому напрямку, а також для монтажу деталей при посадці з натягом. Для зменшення маси, а також для підведення змащення проектують порожнисті вали (рис. 2.65,г).

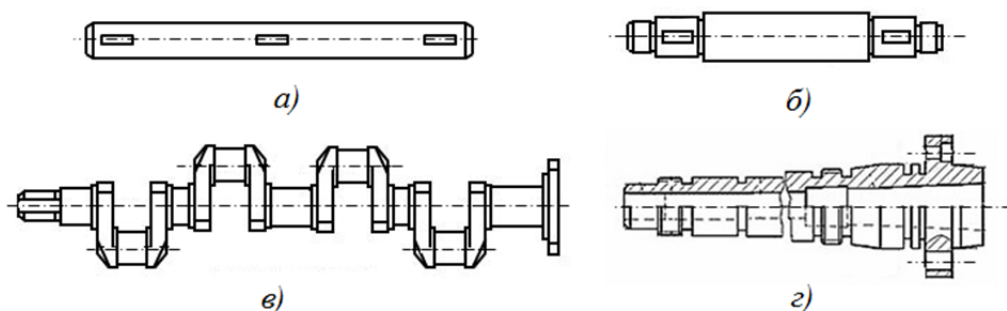


Рис. 2.65. Деякі види осей та валів:

а – прями; б – ступінчасті; в – колінчастий вал; г – порожнистий вал (шпиндель токарного верстата).

Вздовж валу чи осі розрізняють такі ділянки (рис. 2.66): опорні ділянки – цапфи, які спираються на підшипники – несучі ділянки, на яких закріплюють обертові деталі (зубчасті колеса, шків, зірочки ланцюгових передач тощо), перехідні ділянки, які з'єднують опорні ділянки з несучими.

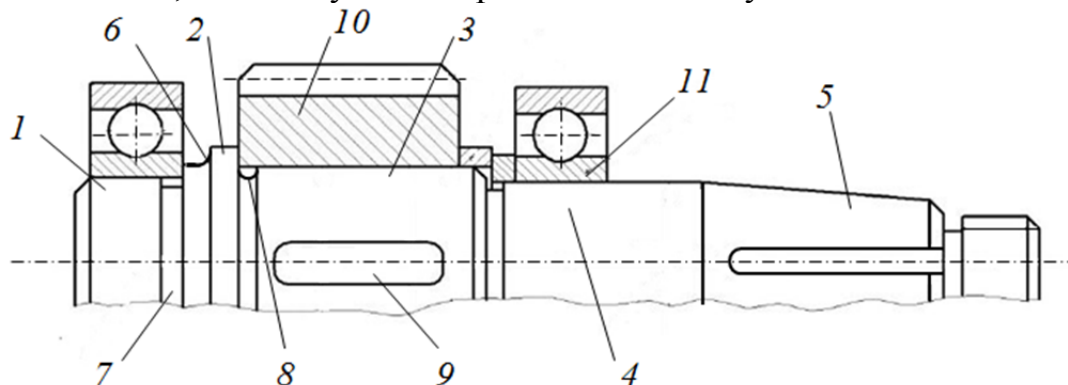


Рис. 2.66. Ступінчастий вал:

1 – шип; 2 – бурт; 3 – посадочне місце для основної деталі вузла; 4 – шийка; 5 – хвостовик (конічний з різьбою); 6 – гальтель; 7, 8 – проточки пряма та кругла; 9 – паз під шпонку; 10 – зубчасте колесо; 11 – вальниця.

Цапфи поділяються на шипи, які знаходяться на кінцях валу та сприймають радіальні сили, шийки – проміжні цапфи та п'яти – кінцеві ділянки, які сприймають осьові сили.

Вали та осі найчастіше виконуються з таких матеріалів:

- Ст5, Ст4 та інші для валів без термообробки;
- сталь 45, 40Х та інші для валів з термообробкою (поліпшення);
- сталь 20, 20Х для швидкохідних валів на підшипниках ковзання з цементациєю цапф;
- сталь 20, 30, Ст3, Ст4 та інші для осей.

Задачами розрахунку валів та осей є забезпечення витривалісної міцності, обмеження деформації згину та кручення, можливих поперечних та крутильних коливань. Осі звичайно розраховують як балки на поперечний згин, а вали – на втомлювальну міцність (витривалість в результаті спільної дії згину і кручення).

Розрахунок валів складається з двох етапів: проектного та перевірконого розрахунку. При проектному розрахунку валів, як правило, відомі навантаження, розміри основних деталей розташованих на валу. Потрібно вибрати матеріал і визначити розміри валу.

Попередньо визначають середній діаметр валу з розрахунку лише на кручення при знижених допустимих напруженнях (згинальний момент невідомий, тому що невідомо розташування опор та місця прикладення навантаження).

З умов міцності на кручення отримуємо:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot [\tau_k]}} \quad (2.204)$$

Як правило, приймають для трансмісійних валів $[\tau_k]=20-30 \text{ МПа}$, для редукторних валів $[\tau_k]=12-15 \text{ МПа}$. Знайдене значення заокруглюється до стандартного у межах 5 мм.

Перевірочний розрахунок починається з компоновки валу: розміщення та розмірів посадкових місць, цапф, хвостовика (за потреби). За отриманим розміром складають розрахункову схему, визначають розрахункові навантаження, будують епюри внутрішніх сил, моментів, а також напруг. Знаходять небезпечні перерізи, обумовлені найбільшим згинальним моментом, ослаблені концентраторами напружень: галтель, виточка, шпонковий паз, різьба тощо.

Для небезпечних перерізів перевіряється статична міцність валу за гіпотезами міцності. Наприклад, при використанні енергетичної теорії міцності еквівалентні напруження визначаються за формулою:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma], \quad (2.205)$$

де допустимі напруження приймаються $[\sigma] = 0,6 \dots 0,8 \sigma_m$, (σ_m – межа текучості).

Проводять розрахунок на витривалість за запасом опору втоми:

$$s = \frac{s_\sigma \cdot s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}} \geq [s] \approx 2,5, \quad (2.206)$$

де s_σ – коефіцієнт запасу опору втоми за нормальними напруженнями;

s_τ – коефіцієнт запасу опору втоми за дотичними напруженнями.

При умові виконання розрахунку на жорсткість валу значення допустимого коефіцієнту запасу можна зменшити до 1,7.

Коефіцієнт запасу опору втоми за нормальними напруженнями визначається:

$$s_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_{cp}}, \quad (2.207)$$

де σ_{-1} – границя витривалості при згині, для вуглецевих сталей $\sigma_{-1}=0,43\sigma_s$, для легованих сталей $\sigma_{-1}=0,35\sigma_s+(70 \dots 120) \text{ МПа}$ (σ_s – межа міцності сталі);

k_σ – ефективний коефіцієнт концентрації нормальних напружень;

ε_σ – масштабний фактор для нормальних напружень;



β – коефіцієнт, який враховує шорсткість поверхонь (при $R_a=0,32 - 2,5\text{мкм}$ $\beta=0,97...0,90$);

σ_a - амплітуда циклів напружень при згині (внаслідок обертання валу напруження згину у різних точках його поперечного перерізу змінюються за симетричним циклом), $\sigma_a = \sigma_{max}$;

ψ_σ – коефіцієнт, що корегує вплив постійної складової циклу напружень за опором втоми (для вуглецевих сталей $\psi_\sigma = 0,2$, для легованих $\psi_\sigma = 0,23...0,3$);

σ_{cp} - середнє напруження циклу (при симетричному циклі $\sigma_{cp} = 0$).

Коефіцієнт запасу опору втоми за дотичними напруженнями визначається:

$$s_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_{cp}}, \quad (2.208)$$

де τ_{-1} - границя витривалості при крученні (для вуглецевих сталей $\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}$);

k_τ – ефективний коефіцієнт концентрації дотичних напружень;

ε_τ – масштабний фактор для дотичних напружень;

β – коефіцієнт, який враховує шорсткість поверхонь (при $R_a=0,32 - 2,5\text{мкм}$ $\beta=0,97...0,90$);

τ_a - амплітуда циклів напружень при згинанні (внаслідок обертання валу напруження згину у різних точках його поперечного перерізу змінюються за симетричним циклом, тоді $\tau_a = 0,5\tau$);

ψ_τ – коефіцієнт, що корегує вплив постійної складової циклу напружень за опором втоми ($\psi_\tau = 0,1$);

τ_{cp} - середнє напруження циклу (при віднульовому циклі $\tau_{cp} = 0,5\tau$).

Значення коефіцієнтів визначаються по довідковим таблицям (наприклад [11,12]).

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняються вал і ось?
2. Чим відрізняються шип та шийка валу?
3. Що таке «цапфа»?
4. На які види деформації розраховують вали, осі?

2.2.10. Опори валів

Опорами для валів і осей є вальниці (підшипники). Вони підтримують вали, забезпечують можливість обертання, сприймають прикладені до них радіальні й осьові навантаження. Від якості вальниць у значній мірі залежать працездатність і довговічність машин. Щоб уникнути зниження ККД механізму, втрати на тертя у вальницях повинні бути мінімальними.

Вальниці класифікують за видом тертя та видом навантаження.

За видом тертя розрізняють:

- вальниці ковзання, у яких опорна ділянка валу ковзає по поверхні вальниці;

- вальниці кочення, у яких тертя ковзання замінюють тертям кочення за допомогою установалення кульок або роликів між опорними поверхнями вальниці і валу.

За навантаженням, що сприймається, розрізняють вальниці:

- радіальні, які сприймають радіальні навантаження;
- упорні, які сприймають осьові навантаження;
- радіально-упорні, які сприймають радіальні й осьові навантаження.

Вальниці ковзання – це опори обертових деталей, які працюють в умовах ковзання поверхонь цапфи та вальниці. Форма робочої поверхні вальниці ковзання (рис.2.67) так само, як і форма цапфи валу, може бути циліндричною (*a*), конічною (*б*), кульковою (*в*) або плоскою (*г*). Опору, що передає осьове навантаження, називають підп'ятником.

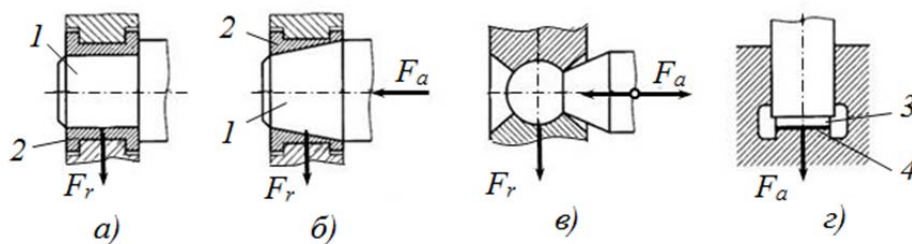


Рис. 2.67. Схеми вальниць ковзання з циліндричною(*a*), конічною(*б*), кульковою(*в*) та плоскою(*г*) робочими поверхнями: 1 – цапфа; 2 – вкладиш; 3 – п'ята; 4 – підп'ятник.

Підп'ятники працюють, як правило, у парі з радіальними вальницями. Більшість радіальних вальниць можуть сприймати також і невеликі осьові навантаження. Для фіксації валу в осьовому напрямку його виготовляють східчастим з галтелями, а кромки вальниці заокруглюють.

Вальниці з конічною поверхнею застосовують рідко. Їх використовують при невеликих навантаженнях у випадках, коли необхідно систематично усувати зазор від зношення підшипника з метою збереження точності механізму.

Кулькові вальниці допускають перекошення вісі валу, тобто мають властивість самовстановлення. Їх застосовують переважно як шарніри у підйомних механізмах з періодичним поворотом у межах обмежених кутів.

Основним елементом вальниці (рис. 2.67) є вкладиш 2 з тонким шаром антифрикційного матеріалу на опорній поверхні. Вкладиш встановлюють у спеціальному корпусі вальниці або безпосередньо у корпусі машини (станіні, рамі і т.д.)

Область застосування вальниць ковзання у сучасному машинобудуванні скоротилася у зв'язку з поширенням вальниць кочення. Однак значення вальниць ковзання у сучасній техніці не знизилася. Їх застосовують дуже широко, і в цілому ряді конструкцій вони незамінні. До таких вальниць належать:

- 1) роз'ємні вальниці, необхідні за умовами зборки, наприклад для колінчастих валів;



2) високошвидкісні вальниці ($v > 30$ м/с), в умовах роботи яких довговічність вальниць кочення різко скорочується (вібрації, шум, великі інерційні навантаження на тіла кочення);

3) вальниці прецизійних машин, від яких потрібний особливо точний напрямок валів і можливість регулювання зазорів;

4) вальниці, що працюють в особливих умовах (вода, агресивне середовище і т.п.), у яких вальниці кочення непрацездатні через корозію;

5) вальниці дешевих тихохідних механізмів і деякі інші.

Робота тертя є основним показником працездатності вальниці. Вона визначає зношення і нагрів вальниці та його ККД. Для зменшення тертя вальниці ковзання змащують. У залежності від режиму роботи вальниці у ньому може бути напіврідинне або рідинне тертя.

Рідинне тертя забезпечує найменший коефіцієнт тертя $f = 0,001 \dots 0,005$, який може бути менше за коефіцієнт тертя кочення. При рідинному терті робочі цапфи і вкладиша розділені шаром масла, товщина h якого повинна більше суми висот R_z нерівностей поверхонь (рис. 2.68):

$$h > R_{z1} + R_{z2}. \quad (2.209)$$

При цій умові масло сприймає зовнішнє навантаження, а опір руху визначається лише внутрішнім тертям у масляній рідині.

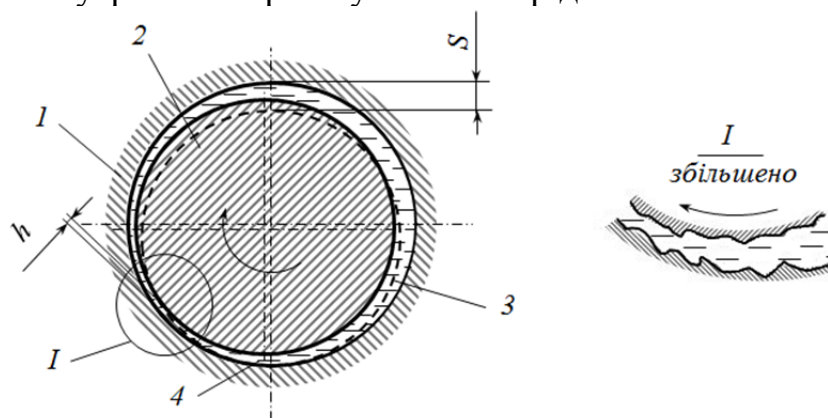


Рис. 2.68. Схема вальниці ковзання з рідинним тертям:

1 – вкладиш вальниці; 2 – цапфа; 3 – положення цапфи у стані спокою; 4 – шар масла; S – зазор між деталями у стані спокою; h – найменша товщина шару масла.

При напіврідинному терті умова (2.209) не дотримується, у вальниці виникає змішане тертя — одночасно рідинне і граничне. Граничним називають тертя, при якому поверхні покриті найтоншою плівкою мащення, що утворилася в результаті дії молекулярних сил і хімічних реакцій активних молекул масла і матеріалу вкладиша. Граничні плівки стійкі і витримують великі тиски. Однак у місцях зосередженого тиску вони руйнуються, відбувається стикання чистих поверхонь металів, їхнє схоплювання і відрив частин матеріалу при відносному русі, що викликає зношення поверхонь.

Значення коефіцієнта напіврідинного тертя залежить не лише від якості мастила, але також і від матеріалу поверхонь вкладиша та цапфи валу. Для

найпоширенних антифрикційних матеріалів коефіцієнт напіврідинного тертя складає 0,008. ..0,1.

Основним критерієм розрахунку більшості вальниць ковзання є утворення режиму рідинного тертя. Це одночасно забезпечує працездатність за критеріями зношення і заїдання. Забезпечення режиму рідинного тертя потребує виконання таких основних умов:

- 1) між поверхнями, що ковзають, повинен бути зазор, що забезпечує утворення масляного клину між цапфою та вкладишем при роботі вальниці;
- 2) масло відповідної в'язкості повинне безперервно заповнювати зазор;
- 3) швидкість відносного руху поверхонь повинна бути достатньою для того, щоб у масляному шарі утворився тиск, який врівноважує зовнішнє навантаження.

До матеріалу вкладиша висуваються такі умови:

- 1) малий коефіцієнт тертя і високий опір заїданню у періоди відсутності режиму рідинного тертя (пуски, гальмування і т. п.);
- 2) достатня зносостійкість поряд зі спроможністю до припрацювання, також зносостійкість вкладиша повинна бути нижче зносостійкості цапфи, тому що заміна валу обходиться значно дорожче, ніж заміна вкладиша;
- 3) добрі характеристики міцності й особливо високий опір крихкому руйнуванню при дії ударних навантажень.

Вкладиші виготовляють з найрізноманітніших матеріалів: бронзи, чавуну, бабіту, пластмаси, металокераміки тощо. З метою підвищення міцності вальниць, особливо при змінних і ударних навантаженнях, застосовують біметалічні вкладиші, у яких на сталеву основу наплавляють тонкий шар антифрикційного матеріалу — бронзи, срібла, сплаву алюмінію тощо. Біметалічні вальниці мають високу навантажувальну спроможність.

В основу розрахунків вальниць ковзання покладено обмеження тиску у вальниці та питомої роботи сил тертя. Умова забезпечення допустимого тиску гарантує не видавлювання масла з масляного шару між цапфою та вкладишем. Вона має вигляд:

$$p = \frac{R}{dl} \leq [p] \quad (2.210)$$

Критерієм працездатності вальниці з умов обмеження сил тертя є добуток тиску p на швидкість ковзання v :

$$pv = \frac{Rv}{ld} = \frac{2\pi \cdot n \cdot d \cdot R}{60 \cdot l \cdot d \cdot 2} = \frac{Rn\pi}{60l} \quad (2.211)$$

де R – реакція опори, H ;

n – частота обертання, об/хв.;

d, l – діаметр та довжина цапфи, мм.

Нормальні умови роботи вальниці забезпечуються при умові:

$$pv \leq [pv] \quad (2.212)$$



Значення допустимих величин $[p]$ і $[pv]$ наводяться в довідковій літературі. Вони залежать від матеріалу вальниці, умов роботи, властивостей масла, тощо. Для більшості матеріалів $[p] = 1 \dots 4$ МПа, $[pv] = 2 \dots 10$ МПа·м/с.

Найбільш небезпечним є момент пуску механізму, оскільки у спокої вал опускається ("лягає") на вкладиш і при початку руху неминуче напіврідинне або навіть сухе тертя.

Вальниці кочення – це елементи опор осей, валів та інших деталей, що працюють за принципом тертя кочення, яке менш суттєво залежить від змащування (умовний коефіцієнт тертя близький до коефіцієнту рідинного тертя $f \approx 0,0015 \dots 0,006$). При цьому спрощується система змащування та обслуговування вальниці. Конструкція вальниць кочення дозволяє виготовляти їх у великих кількостях як стандартну продукцію, що значно зменшує вартість виробництва.

Вальниці кочення для опор у порівнянні з іншими видами мають малі втрати на тертя, що забезпечує високий ККД опор (до 0,99), незначні витрати мастильних матеріалів, відносно невисокі вимоги до матеріалу та якості поверхонь цапф валів і осей, що розміщуються у вальницях кочення.

Поряд з цим, вони мають значні габаритні розміри, що утруднює застосування їх при малих відстанях між осями валів; обмежений термін служби при великих навантаженнях та швидкостях; низьку здатність сприймати ударні навантаження.

Вальниця кочення складається із зовнішнього та внутрішнього кілець, тіл кочення і сепаратора (рис. 2.69). Внутрішнім кільцем вальницю розміщують на валу або осі, а зовнішнім – у корпусі опори. Обертання кілець одне відносно іншого забезпечується за рахунок тіл кочення між кільцями. Тіла кочення перекочуються по доріжках кочення (бігових доріжках), які передбачені на зовнішньому та внутрішньому кільцях вальниці. Сепаратор розділяє тіла кочення і утримує їх на однаковій відстані.



Рис.2.69. Загальний вигляд вальниці кочення.

Вальниці кочення поділяють за такими ознаками:

1. За формою тіл кочення вальниці бувають кулькові та роликові. Роликові вальниці за тією ж ознакою ділять на: вальниці із короткими та довгими роликами; із витими роликами (рис. 2.70,е); із конічними роликами (рис. 2.70,з); із бочкоподібними роликами (рис. 2.70,в) і з голчастими роликами (рис. 2.70,д).

2. За числом рядів тіл кочення: одно – , двох – та чотирьохрядні.

3. За способом компенсації перекосів валу – які не самовстановлюються та ті, що самовстановлюються – сферичні (рис. 2.70,б та з). Вальниці, що

самовстановлюються, допускають перекося кілець до $2-3^\circ$, завдяки чому можуть працювати при збільшених деформаціях валів і при неспіввісному розміщенні отворів під вальниці в окремих опорах валу.

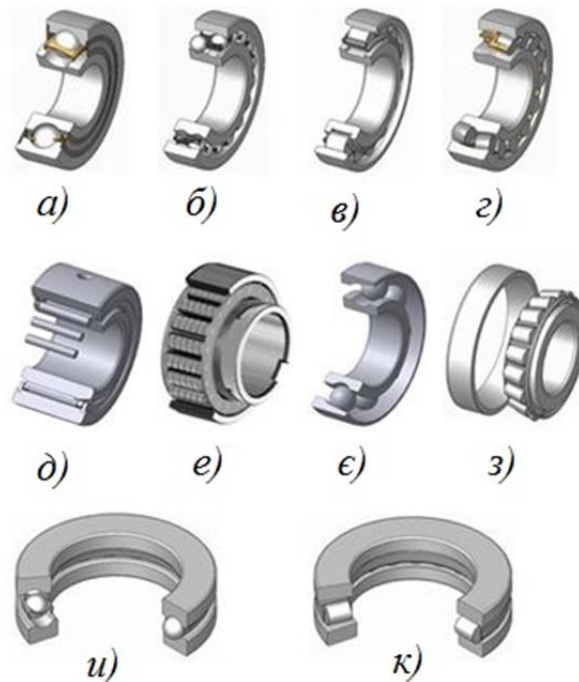


Рис.2.70. Типи вальниць кочення:

a — радіальна кулькова однорядна; б — радіальна кулькова дворядна сферична; в — радіальна з короткими циліндричними роликами; г — радіальна дворядна сферична з бочкоподібними роликами; д — голчаста; е — радіальна із крученими роликами; є — радіально-упорна кулькова; з — радіально-упорна роликова конічна; и — упорна кулькова; к — радіально-упорна роликова.

4. За радіальними розмірами вальниці кочення з одним і тим же внутрішнім діаметром d ділять на 5 серій діаметрів (надлегка, особливо легка, легка, середня та важка) і на 5 серій ширини (особливо вузька, вузька, нормальна широка, особливо широка).

5. За напрямом сприйманого навантаження вальниці кочення поділяють на: радіальні – сприймають лише радіальне навантаження, яке направлене перпендикулярно до вісі обертання (деякі радіальні вальниці, наприклад кулькові, можуть сприймати певні осьові навантаження); упорні – сприймають лише осьове навантаження; радіально-упорні — здатні сприймати радіальне та осьове навантаження; упорно-радіальні — сприймають значне осьове і незначне радіальне навантаження.

Кулькові радіальні однорядні вальниці (рис. 2.70,а) найбільш поширені внаслідок невисокої вартості, простоти монтажу і здатності сприймати комбіновані навантаження. Вони сприймають радіальні і невеликі осьові навантаження в обидва боки, що не перевищують 70% невикористаного припустимого радіального навантаження; фіксують осьове положення в обох напрямках у межах величини осьового зазору; допускають перекося осей кілець на $15'$.



Радіальні кулькові вальниці встановлюють у редукторах, металорізальних верстатах, транспортерах і в багатьох інших машинах.

Кулькові радіальні дворядні сферичні (самоустановлювальні) вальниці сприймають радіальні і невеликі осьові навантаження в обидва боки. Допускають значні (до $2 - 3^0$) перекося внутрішнього кільця (валу) щодо зовнішнього кільця (корпуса). Застосовуються у вузлах з нежорсткими валами й у конструкціях, де вали мають окремі опорні вузли.

Роликові радіальні вальниці з короткими циліндричними роликами (рис. 2.41,в) сприймають значні радіальні навантаження і не сприймають осьові. Радіальні роликотвальниці за швидкохідністю не поступаються кульковим вальницям радіальним і мають у 1,5 рази більшу вантажопідйомність, але вимагають більш точної співвісності посадкових місць.

Роликові голчасті вальниці при мінімальних радіальних габаритах мають максимальну радіальну вантажопідйомність. Осьові навантаження голчасті вальниці не сприймають.

Вальниці позначають системою цифр. Основне позначення може включати від трьох до семи цифр (табл. 2.4, 2.5).

Крім основного позначення можуть додаватися знаки додаткового позначення. Зліва від основного позначення ставлять знаки: клас точності (у порядку підвищення точності 0 - нормальний, 6, 5, 4, 2); група радіального проміжку (1,2...9; для радіально-упорних кулькових вальниць означають міру попереднього натягу 1, 2, 3) тощо.

Схема основного умовного позначення для вальниць з діаметром отвору до 10 мм

Таблиця 2.4

×	××	×	0	×	×
розмірна серія (серія ширини або висоти), один знак	конструктивне виконання, два знаки	тип вальниці, один знак	знак нуль	серія діаметрів, один знак	діаметр отвору, один знак

Схема умовного позначення для вальниць діаметром отвору від 10 мм і вище

Таблиця 2.5

×	××	×	×	××
розмірна серія (серія ширини або висоти), один знак	конструктивне виконання, два знаки	тип вальниці, один знак	серія діаметрів, один знак	діаметр отвору, два знаки; це двозначне число (окрім 00,01,02 і 03) яке при множині на «5» — дає внутрішній діаметр в мм

Примітка: 1) Позначення діаметра вала діаметра менш 20мм:

Позначення діаметра 00 01 02 03.

Номинальний діаметр вала, мм 10 12 15 17.

2) Нулі, що розташовані ліворуч останньої значущої цифри відкидаються.

Значок \times позначає певну цифру у відповідності до прийнятих вимог маркування вальниць.

Праворуч від основного позначення ставлять знаки: матеріал деталей вальниць (наприклад: Е — сепаратор з пластичних матеріалів, Ю — деталі вальниць з нержавіючої сталі і т.д.); конструктивні особливості (наприклад, До — конструктивні зміни деталей вальниць, М — роликові вальниці з модифікованим контактом); мастильний матеріал, що закладається у вальниці закритого типу при їх виготовленні тощо.

Приклади позначення.

Вальниця 36207Е. Додаємо нулі до повного позначення: «0 – 0/03/6/2/07/Е». Поділяємо на групи, отримуємо: 0 - клас точності нормальний; 03 – кут контакту $\beta = 12^\circ$; 6 - радіально-упорна кулькова; 2 - легка серія; 07 - $d=(7\cdot5)=35\text{мм}$; Е – текстолітовий сепаратор.

Вальниця 210. Додаємо нулі: «0 – 0/00/0/2/10». Поділяємо позначення на групи: 0 - клас точності нормальний; 00 - конструктивні особливості не вказані, 0 – радіальна кулькова; 2 - легка серія; 10-внутрішній діаметр $d=5\times10=50\text{мм}$.

Іноді розшифровують позначення починаючи із цифр розташованих праворуч. Наприклад вальниця 7216 – внутрішній діаметр $d = 5\times16 = 80\text{ мм}$, легка серія, вальниця роликова конічна, точність - нормальна.

Основні параметри стандартних вальниць – розміри, маса, вантажність (статична і динамічна), гранична швидкість обертання – наводяться у спеціальних каталогах вальниць кочення.

Вибір типу вальниці ґрунтується на аналізі діючих на вал навантажень. Розрізняють підбір вальниць за динамічною вантажопідйомністю для запобігання руйнування від втоми (викришування) (при $n \geq 10\text{ об./хв.}$) та за статичною вантажопідйомністю для запобігання остаточним деформаціям.

Попередньо обирають вальниці середньої серії за розрахованим діаметром валу. Для перевірки обраної вальниці визначається її довговічність у годинах.

Довговічність у годинах:

$$L_h = \frac{L \times 10^6}{60n} > 10000, \quad (2.213)$$

де L – довговічність (млн. обертів):

$$L = \left(\frac{C}{P_e} \right)^p, \quad (2.214)$$

де, C - динамічна вантажопідйомність із паспорту вальниці (додаток А);

P_e – еквівалентне навантаження, Н;

p – показник степені: для кулькових вальниць $p=3$, для роликових $p=10/3$.

Паспортна динамічна вантажопідйомність – це таке постійне навантаження, яке вальниця може витримати протягом 1 млн. обертів без виявлення ознак втоми не менш, ніж у 90% із визначеної кількості вальниць (наводиться у каталозі вальниць).



Еквівалентне навантаження при $\frac{F_a}{F_r} < e$ визначається:

$$P_e = F_r \cdot V \cdot k_p \cdot k_m, \quad (2.215)$$

де V – коефіцієнт, що враховує вид навантаження кілець вальниці: при обертанні внутрішнього кільця $V=1$, при обертанні зовнішнього - $V=1,3$;

k_p – коефіцієнт режиму роботи ($k_p=1,0 \dots 3,0$);

k_m – температурний коефіцієнт ($k_m=1,0 \dots 1,45$);

e – коефіцієнт осьового навантаження, визначається в залежності від конструктивних особливостей вальниці (в основному від кута контакту тіл кочення з поверхнею кілець).

Якщо відношення $\frac{F_a}{F_r} > e$, то еквівалентне навантаження визначаємо з урахуванням осьової сили:

$$P_e = (X \cdot F_r \cdot V + Y \cdot F_a) \cdot k_p \cdot k_m, \quad (2.216)$$

де X, Y – коефіцієнти розподілу навантаження у вальниці визначаються відповідно до значення коефіцієнту осьового навантаження (для однорядних вальниць при $\frac{F_a}{V \cdot F_r} \leq e$ $X=1, Y=0$).

Якщо умова (2.213) не виконується, то потрібно обрати вальниці більш важкої серії.

Умова перевірки чи підбору по статичній вантажопідйомності:

$$P_0 \leq C_0, \quad (2.217)$$

де P_0 – еквівалентне статичне навантаження,

C_0 – статична вантажопідйомність (паспортна).

Статична вантажопідйомність – таке статичне навантаження, якому відповідає загальна остаточно деформація тіл кочення та кілець у найбільш навантаженій точці контакту (0,0001 діаметра тіл кочення).

Еквівалентне статичне навантаження:

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a, \quad (2.218)$$

де X_0, Y_0 – коефіцієнти радіального та осьового навантаження.

$X_0=0,6, Y_0=0,5$ – радіальні кулькові вальниці однорядні і дворядні;
 $X_0=0,5; Y_0=0,47 \dots 0,28$ (при $\alpha=12 \dots 36^\circ$ відповідно) – радіально-упорні кулькові вальниці;
 $X_0=0,5; Y_0=0,22 \text{ctg} \alpha$ – конічні та самоустановлювальні кулькові вальниці та роликові вальниці.

Питання для самоконтролю

1. Вкажіть види вальниць та галузі їх застосування.
2. Поясніть будову вальниці ковзання.
3. Призначення та вимоги до вкладиша вальниці ковзання.
4. Вкажіть умову існування рідинного тертя у вальниці ковзання.
5. За яким параметром розраховують вальниці ковзання?
6. Поясніть будову вальниці кочення.
7. Яке призначення мають вальниці кочення? Які їхні переваги і недоліки у порівнянні з вальницями ковзання?

8. Які бувають вальниці кочення за напрямом дії навантаження, що сприймається, і за формою тіл кочення?

9. Чим пояснюється підвищена несуча здатність роликкових вальниць кочення у порівнянні з кульковими?

10. Визначте тип і внутрішній діаметр вальниць, що мають позначення: 308, 2306, 1209, 7211.

11. Навантаження яких напрямів може сприймати вальниця 304? Чи забезпечує вальниця фіксацію в осьовому напрямку та чи допускає ця вальниця перекоси вала в корпусі й у яких межах?

12. Поясніть методику вибору та розрахунку вальниць кочення.

2.2.11. Муфти

Муфти служать для з'єднання валів. Також муфти використовують для включення та виключення виконавчого органу при безперервній роботі двигуна (керовані муфти), запобігання машини від перевантажень (запобіжні муфти), компенсації шкідливого впливу неспіввісності вала (компенсуючі муфти), зменшення динамічних коливань (пружні муфти) тощо.

Основною паспортною характеристикою муфти є значення номінального обертового моменту, що вона передає.

Муфти поділяють на:

- 1) некеровані (постійної дії): глухі, компенсуючі жорсткі, компенсуючі пружні;
- 2) керовані: кулачкові, зубчасті, фрикційні;
- 3) самокеровані автоматичні: відцентрові (самокеруються по частоті обертання), запобіжні (самокеруються по моменту), вільного ходу (самокеруються по напрямку обертання).

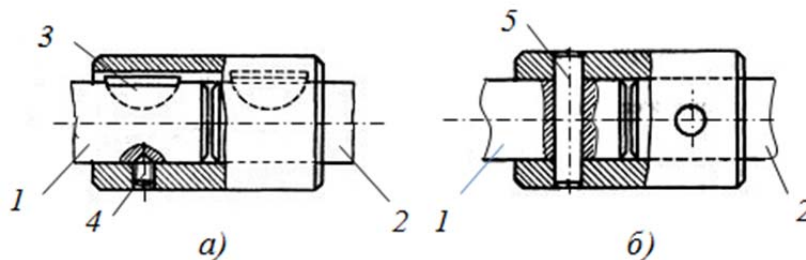


Рис. 2.71. Втулкові муфти з шпонками (а) та штифтами (б):
 1,2 – ведучий та ведений вали; 3 – шпонка; 4 – установочний гвинт;
 5 – штифт.

Глухі муфти утворюють жорстке нерухоме з'єднання валів (глухе з'єднання). До глухих муфт належать втулкова муфта (рис. 2.71), яка відрізняється простотою конструкції і малими габаритами (застосовується у легких машинах при діаметрах валів до 60...70 мм) та фланцева муфта (рис. 2.72), яка застосовується для з'єднання валів діаметром до 200 мм і більш.

Втулкова муфта (рис. 2.71) це втулка, яка встановлюється із зазором на кінці валів. Крутний момент передається шпонками або штифтами. Муфта відрізняється малими габаритами за діаметром, але ускладнює монтаж із-за



необхідності великих осьових зміщень агрегатів, що сполучаються. Матеріал втулок - конструкційна сталь.

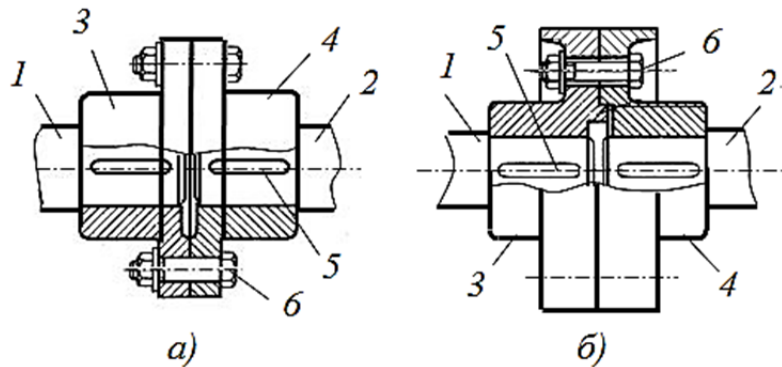


Рис. 2.72. Фланцеві муфти з установкою болтів без зазорів(а) та з зазорами(б):

1,2 – ведучий та ведений вали; 3, 4 – фланці муфти; 5 – шпонки.

Фланцева муфта (рис. 2.72) складається з двох напівмуфт, виконаних у вигляді маточини з фланцем. Фланці з'єднуються болтами. Глухі муфти не компенсують помилки виготовлення і монтажу, вимагають точного центрування валів.

Для зниження цих вимог і зменшення шкідливих навантажень на вали й опори застосовують компенсуючі муфти. Компенсація шкідливого впливу неспіввісності валів досягається: унаслідок надання можливості рухатися жорстким деталям — в жорстких компенсуючих муфтах; за рахунок деформації пружних елементів – в пружних муфтах.

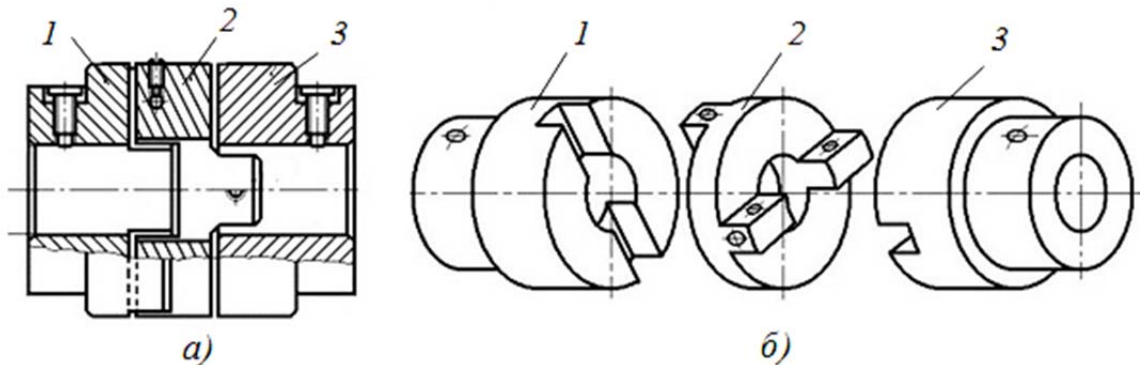


Рис. 2.73. Кулачкова-дیسкова муфта: розріз(а), загальний вигляд деталей(б); 1,3 – напівмуфти; 2 – диск.

Найбільше поширення з груп жорстких компенсуючих муфт одержали кулачково-дیسкова і зубчаста. Кулачково-дیسкова муфта складається з двох напівмуфт 1 і 3 (рис. 2.73), що мають радіально розташовані пази, і проміжного плаваючого диска 2 з радіальними взаємно-перпендикулярними виступами (кулачками) на торцях. Виступи диска входять у пази напівмуфт з гарантованим зазором. При радіальному зміщенні валів диск здійснює складний рух із ковзанням в пазах. Момент передається за рахунок натискання один на одного бічних поверхонь виступів і пазів. Для зниження втрат на тертя робочі поверхні пазів і виступів повинні змащуватися.

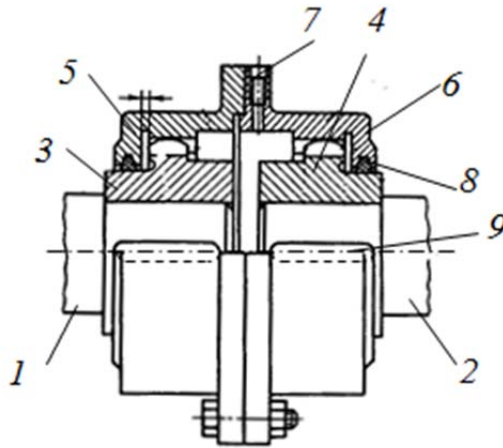


Рис. 2.74. Зубчаста муфта:

1,2 – ведучий та ведений вали; 3,4 – втулки; 5,6 - обойми; 7 – пробка для заливання масла; 8 – ущільнення, 9 – шпонка.

Зубчаста муфта компенсує усі види неспіввісності валів . Вона складається (рис. 2.74) з двох однакових маточин 3,4 (втулок), що мають зовнішні зубчасті вінці і двох однакових обойм 5,6 з внутрішніми зубчастими вінцями. Обойми стягнуті болтами, рівномірно розташованими по колу. У обоймах розташовані спеціальні гумові ущільнення 8, що утримують рідке мастило усередині муфти. Пробка 7 служить для заливки у муфту масла. Число зубів і їх розміри підібрані так, щоб зуби вінця втулки розташовувалися з деяким зазором між зубами обойми, утворюючи зубчасті з'єднання. Зуби втулок і обойм мають евольвентний профіль. Центрування обойми здійснюють за вершинами зубів втулок.

Широке розповсюдження мають також малогабаритні шарнірні муфти (шарнір Гука). На відміну від муфт, що компенсують помилки монтажу, хрестово-шарнірні муфти використовують для з'єднання валів з великою кутовою неспіввісністю (до 35...40°), передбаченою конструкцією машини.

У пружних муфтах напівмуфти зв'язані пружним елементом. Пружний зв'язок напівмуфт дозволяє компенсувати неспіввісність валів; зменшити жорсткість системи з метою усунення резонансних коливань; знизити ударні навантаження.

До пружних муфт належать: муфта з циліндричними пружинами (рис. 2.75,а). Вона складається з обода 1 з ребром 2 і маточини 3 з дисками 4. Ребро обода розміщується між дисками так, що можливий відносний поворот цих деталей.

Ребро і диски мають однакові фасонні вирізи, у які закладають пружини 5 з обмежувачами 6. З торців муфти закривають дисками 7, які прикріплюються до маточини або обода, для запобігання випадання пружини і обмежувачів та забруднення. Такі муфти доцільно застосовувати як пружну ланку у системі з'єднання валів із зубчастими колесами або ланцюговими зірочками. У цьому випадку обід є зубчастим вінцем, а муфта вбудовується в конструкцію зубчастого колеса.

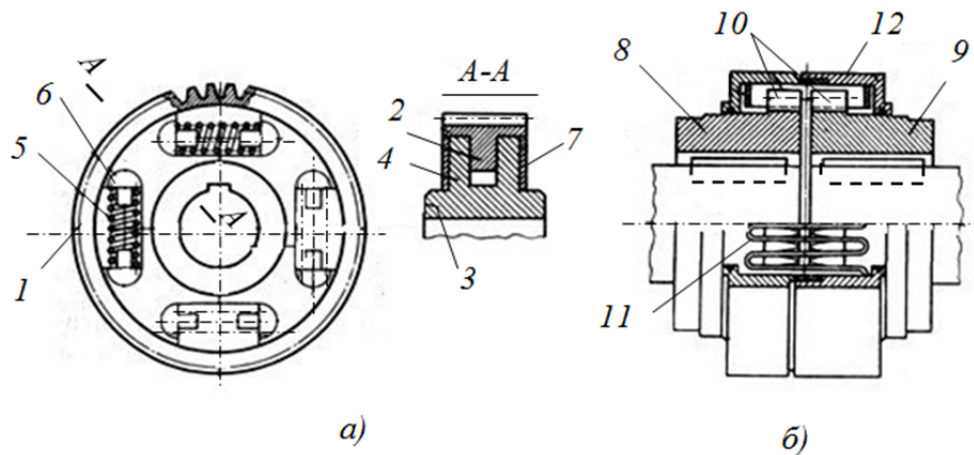


Рис. 2.75. Пружні муфти з циліндричними пружинами (а), зі змієподібними пружинами (б).

Зубчасто-пружинна муфта (зі змієподібними пружинами) (рис. 2.75, б) складається з двох напівмуфт 8 і 9, які мають зуби 10 спеціального профілю. Між зубами розміщується змієподібна пружина 11. Кожух 12 утримує пружину у робочому положенні, захищає муфту від пилу і служить резервуаром для мастильного матеріалу. Така муфта може компенсувати неспіввісність валів Δ_a до 4...20 мм, Δ_r до 0,5...3 мм, Δ_α до $1^\circ 15'$ та застосовується у важкому машинобудуванні (прокатні стани, турбіни, поршневі двигуни і т.п.).

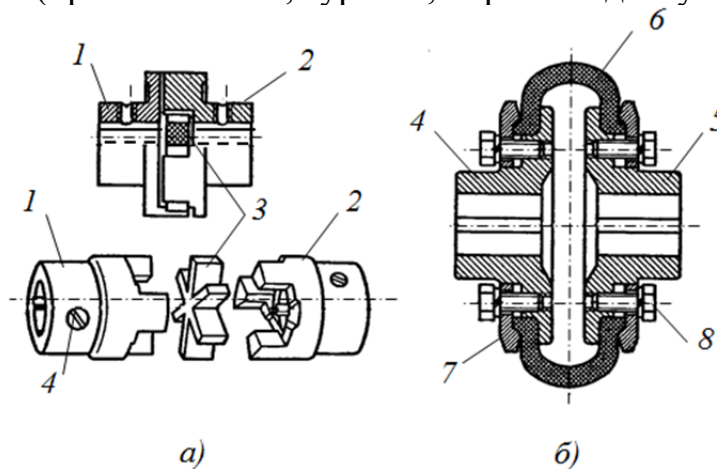


Рис. 2.76. Муфта з гумовою зірочкою(а), муфта з тороподібною гумово-кордовою оболонкою: 1,2,4,5 – напівмуфти; 3 – гумова зірочка; 4 – установочний гвинт; б – тороїдальний пружний елемент; 7 – натискні кільця; 8 – гвинти.

Муфти з гумовою зірочкою (рис. 2.76, а) компактні і надійні в експлуатації, широко використовуються для з'єднання швидкохідних валів ($3000..6000 \text{ хв}^{-1}$) при крутному моменті до 3...120 Н·м і діаметрах валів до 12...45 мм. Вони допускають радіальний зсув осей до 0,2 мм, перекошення осей до $1^\circ 30'$.

Муфта з тороподібною гумово-кордовою оболонкою (рис. 2.76, б) має велику енергоємність, високі пружні і компенсуючі властивості. У ній дві однакові напівмуфти 4, 5 сполучені тороїдальним пружним елементом 6, краї

якого притиснуті до напівмуфт натискними півкільцями 7, і гвинтами 8, рівномірно розташованими по колу. Тороїдальний пружний елемент виготовлений з гуми, армованої нитками корду. Залежно від числа шарів корду і кута його нахилу по відношенню до меридіана торової оболонки змінюється крутильна жорсткість муфти. У машинах з малими навантаженнями пружний елемент виготовляють без корду. Він дешевше і простіше у виготовленні. Завдяки особливій формі пружного елемента ця муфта має підвищену компенсуючу здатність, допускає значну неспіввісність валів: $\Delta_r \approx 2 \dots 6$ мм, $\Delta_\alpha \approx 2 \dots 6^\circ$, кут закручування до $5 \dots 30^\circ$.

Втулково-пальцева муфта (рис.2.77) завдяки легкості виготовлення і заміни гумових елементів отримала поширення, особливо у приводах від електродвигунів з малими і середніми крутними моментами. Вона складається з двох напівмуфт 1 і 2, насаджених на кінці валів з натягом на призматичних шпонках. У одній напівмуфті на конічних хвостовиках закріплюють пальці 3 з натягнутими на них гумовими гофрованими втулками 4. Ці гумові втулки входять у циліндричні отвори напівмуфти 2.

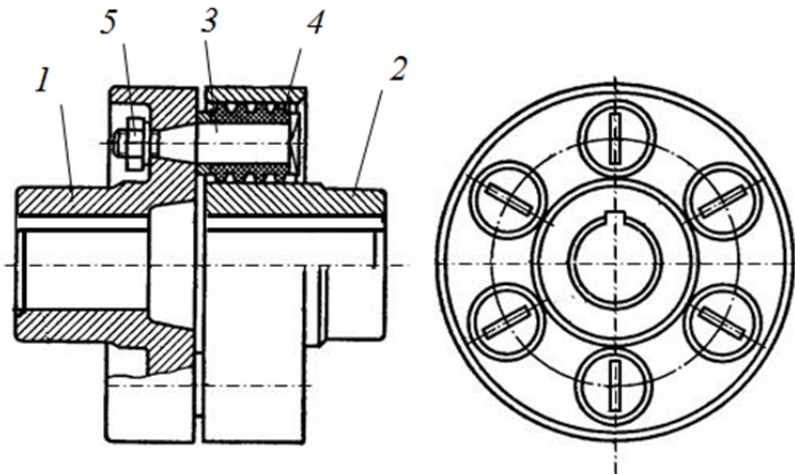


Рис. 2.77. Втулково-пальцева муфта:

1,2 – напівмуфти; 3 – пальці; 4 – гумові втулки; 5 – гайки з шайбами.

Муфта компенсує неточності установки валів: в осьовому напрямі зміщення допускається у межах $\lambda = 1-5$, тах 15 мм; радіальні зміщення валів допускаються у межах $\Delta_r = 0,2 \dots 0,6$ мм в залежності від розмірів муфти; кут перекосу валів повинен бути не більше 1° . Напівмуфту виготовляють з чавуну марки СЧ 21-40, сталь 30, 35Л, пальці - сталь 45, втулка - гума з межею міцності при розтягуванні не нижче 8,0 МПа.

Керовані або зчіпні муфти дозволяють з'єднувати або роз'єднувати вали за допомогою механізму керування. За принципом роботи ці муфти можна розділити на дві групи: муфти, робота яких ґрунтується на зачепленні (кулачкові або зубчасті) та муфти, принцип дії яких ґрунтується на терті (фрикційні).

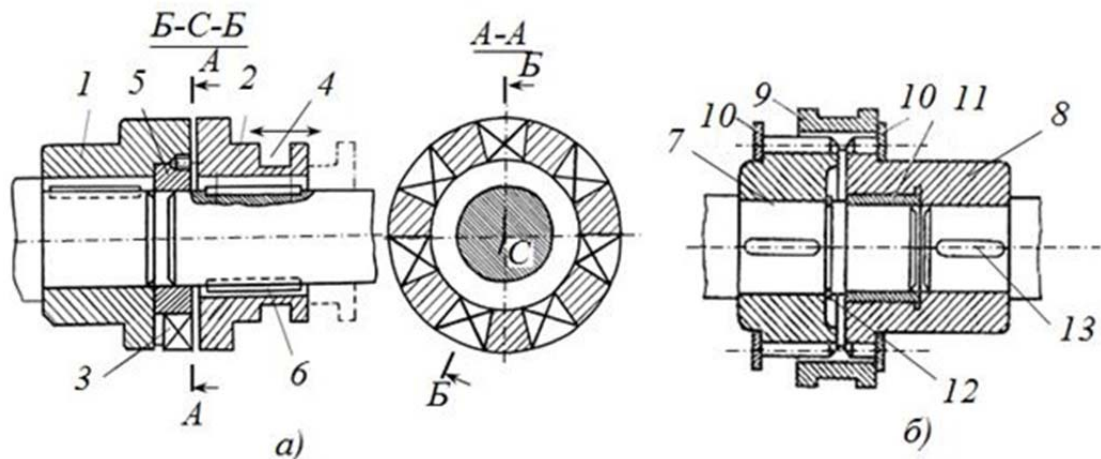


Рис. 2.78. Керовані муфти: кулачкова (а) та зубчаста (б);

1 – нерухома напівмуфта; 2 – рухома напівмуфта; 3 – кулачки; 4 – паз для вилки вмикання муфти; 5 – центрувальне кільце; 6 – шпонки; 7, 8 – зубчасті напівмуфти; 9 – рухома обойма; 10 – обмежувальні кільця; 11 – центрувальна втулка; 12 – шторне кільце; 13 – шпонка.

Кулачкові муфти (рис. 2.78, а) складаються з двох напівмуфт 1, 2 з торцьовими кулачками (виступами) 3, які входять у западини між кулачками спряженої напівмуфти. Одна напівмуфта 1 закріплюється на валу нерухомо, а інша 2 може переміщуватися вздовж другого валу. Рухому напівмуфту переміщують за допомогою спеціального пристрою - механізму управління муфтою. Вилка механізму керування розміщується у кільцевому пазу 4 рухомої напівмуфти. При введенні в зачеплення кулачків двох напівмуфт здійснюється передача крутного моменту від одного валу до іншого. Кільце 5 служить для центрування валів. Застосовують такі основні профілі кулачків: трикутні, трапецеїдальні, прямокутні, несиметричні трикутні і трапецеїдальні.

Зубчаста зчіпна муфта (рис. 2.78, б) подібна зубчастій компенсуючій муфті, з тією різницею, що тут обойма має можливість осьового переміщення за допомогою механізму відведення (вилки). На рис. 2.78, б обойма розташована в положенні «ввімкнено». Диски 10 є обмежувачами, а втулка 11 центрує вали і одночасно виконує функцію вальниці при їх відносному обертанні (коли муфта вмикається). Застосовують також зубчасті муфти без обойми, у яких одна напівмуфта має внутрішні, а інша — зовнішні зубці. Такі муфти використовуються у коробках передач колісних і гусеничних транспортних машин. У цих пристроях муфти доповнюються конусними або дисковими синхронізаторами. Вони служать для вирівнювання кутових швидкостей під час включення, в передачі крутного участі моменту не беруть.

У фрикційних муфтах передача крутного моменту між напівмуфтами здійснюється за рахунок сил тертя, що виникають внаслідок притискання рухомої муфти до нерухомої. Усі фрикційні муфти в залежності від форми робочої поверхні можна розділити на три групи: муфти дискові (рис. 2.79, а), муфти конічні (рис. 2.79, б), муфти колодкові. При включенні фрикційних муфт крутний момент зростає поступово у міру збільшення сили притискання на поверхні тертя. Це дозволяє з'єднувати вали під навантаженням і з великою

різницею початкових кутових швидкостей. У процесі включення муфта пробуксовує, розгін відомого валу відбувається плавно, без удару.

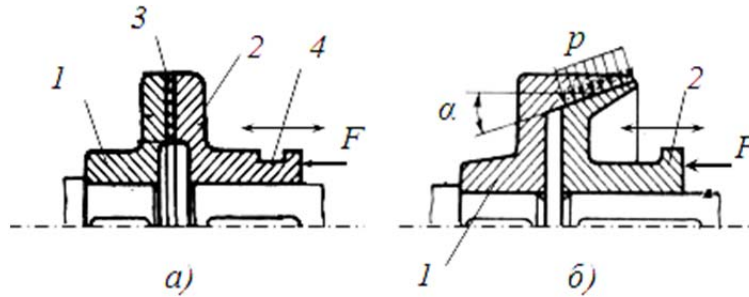


Рис. 2.79. Схеми фрикційної дискової (а) та конічної (б) муфт:
 1 - нерухома напівмуфта; 2 - рухома напівмуфта; 3 - фрикційна вкладка;
 4 - паз для вилки вимикання муфти.

Відрегульована на передачу безпечного для міцності вузлів машини граничного крутного моменту, фрикційна муфта виконує одночасно функції запобіжного пристрою. Фрикційні муфти широко застосовуються у трансмісіях транспортних засобів. Слід зауважити, що фрикційні муфти не компенсують неспіввісність. Центрування напівмуфт досягається розташуванням їх на одному валу або за допомогою спеціальних центрувальних кілець.

Автоматичні або самокеровані муфти призначаються для автоматичного роз'єднання валів у тих випадках, коли параметри роботи машини стають неприпустимі за тими або іншими показниками.

До автоматичних муфт належать:

- запобіжні муфти, які служать для захисту машин від перевантаження;
- відцентрові муфти, які призначені для автоматичного включення і вимикання виконавчого механізму у залежності від кутової швидкості двигуна;
- муфти вільного ходу, які передають крутний момент лише в одному заданому напрямі.

Останні застосовуються у верстатах, автомобілях, мотоциклах, велосипедах тощо.

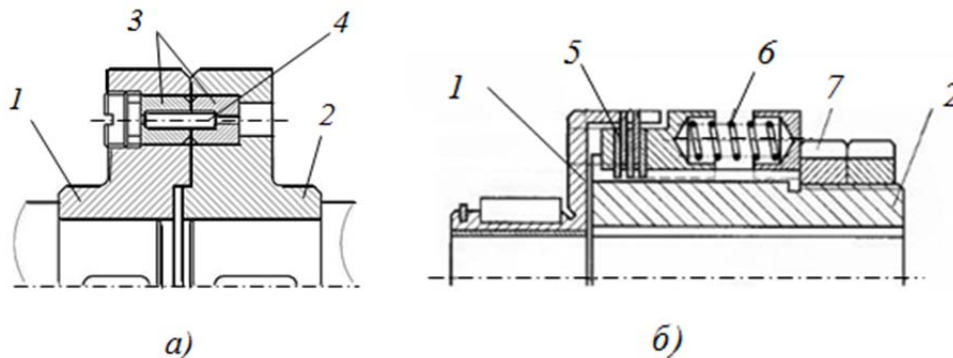


Рис. 2.80. Схеми запобіжної муфти з елементом, що руйнується (а), та фрикційної запобіжної муфти (б):
 1, 2 – ведуча та ведена напівмуфти; 3- втулки; 4 – штифт; 5 – фрикційні диски; 6 – пружини; 7 – регульовальна гайка.



Запобіжна муфта зі спеціальним елементом, що руйнується, складається (рис. 2.80,*а*) з двох фланцевих напівмуфт 1 і 2, по периметру яких вставлені загартовані втулки 3. У середину втулок вставляються запобіжні штифти 4, які при перебільшенні навантаження зрізаються. Для поновлення роботи потрібно поновити штифти.

Фрикційні запобіжні муфти автоматично відновлюють працездатність машини після припинення дії перевантаження, проте точність спрацьовування їх невисока із-за непостійності коефіцієнта тертя на поверхнях дисків.

На рис. 2.80,*б* представлена муфта, у якій напівмуфти 1 і 2 з'єднані пакетом фрикційних дисків 5, стиснутих гвинтовими пружинами 6 строго фіксованою силою. При перевантаженні зовнішні диски проковзують відносно внутрішніх дисків, і муфта передає лише той граничний момент, на який вона налаштована. Варіюючи число фрикційних дисків і силу їх стискування за допомогою гайки 7, муфту можна налаштувати на певний граничний момент.

Роликова муфта вільного ходу (рис. 2.81) складається із зірочки 1 і обойми 2, які є напівмуфтами, роликів 3, розташованих рівномірно за колом, і притискних пристроїв, що включають штовхач 6 і пружину 7. Ролики утримуються бічними кільцями 4.

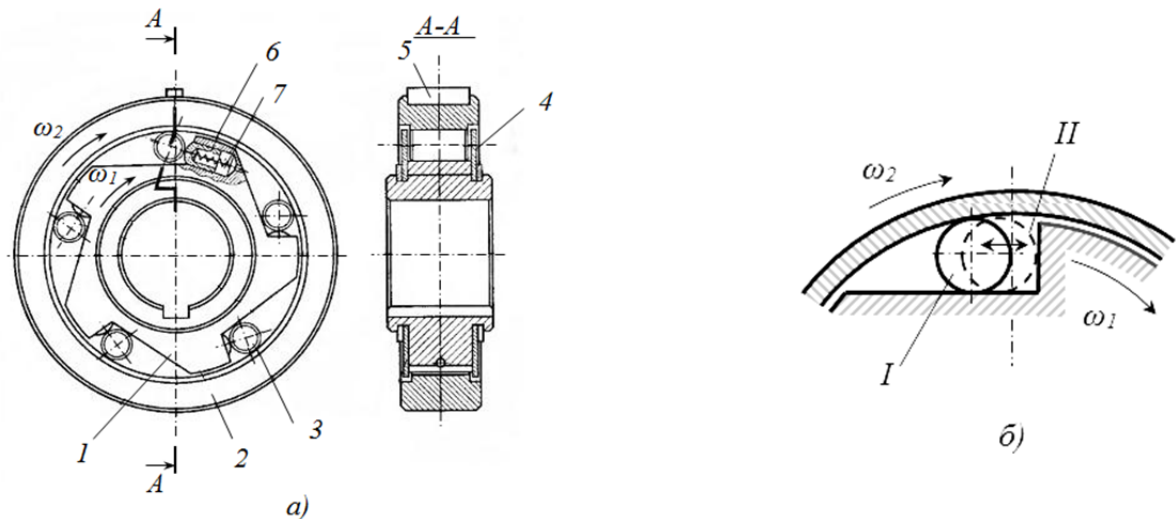


Рис. 2.81. Роликова муфта вільного ходу (*а*), положення ролика у зазорі між обоймою та зірочкою у робочому положенні *I* ($\omega_1 \geq \omega_2$) та режимі вільного ходу *II* ($\omega_2 > \omega_1$): 1 – зірочка; 2 – обойма; 3 – ролик; 4 – бічні кільця; 5 – шпонка; 7 – пружина; 6 – штовхач.

Обойма з'єднується з іншими деталями машини (наприклад, ободом зубчастого колеса) шпонкою 5. Провідною ланкою муфти може бути як зірочка, так і обойма.

Якщо зірочка 1 обертається за годинниковою стрілкою, то ролик 3 зачухується у вузьку частину пазу і тут заклинюється. Утворюється жорстке з'єднання шестерні з валом через ролик 3 і обойму 2. При обертанні зірочки у протилежному напрямку, або якщо кутова швидкість обойми перебільшує швидкість обертання зірочки, ролик перекочується у широку частину пазу (на рис. 2.81,*б* положення ролика показане штриховою лінією) і муфта

роз'єднується. У цьому випадку обойма може обертатися вільно. Штовхач 4, що має слабку пружину 3, виконує допоміжну роль. Він утримує ролик у постійному стиканні з обоймою. Основним параметром муфти є кут заклинювання α зазвичай $\alpha = 6 \dots 10^\circ$.

Відцентрова фрикційна муфта автоматично зчіпляється або розчіпляється за допомогою колодок, на які діє відцентрова сила. За принципом дії відцентрові муфти являють собою фрикційні муфти, у яких механізмом управління служать вантажі-колодки 3 (рис. 2.82). Вмикання фрикційної муфти відбувається за рахунок відцентрової сили, що діє на вантажі. З метою зниження маси вантажів застосовують накладки з фрикційного матеріалу 4. При досягненні певної частоти обертання колодки притискаються до корпуса веденої напівмуфти 5 і муфта вмикається. Передача крутного моменту здійснюється силою тертя, яка пропорційна квадрату кутової швидкості. У сучасному машинобудуванні застосовуються конструкції відцентрових муфт, які служать для розгону механізмів з великими маховими масами при двигуні з малим пусковим моментом, для підвищення плавності пуску, для запобігання розносу машини і т. п.

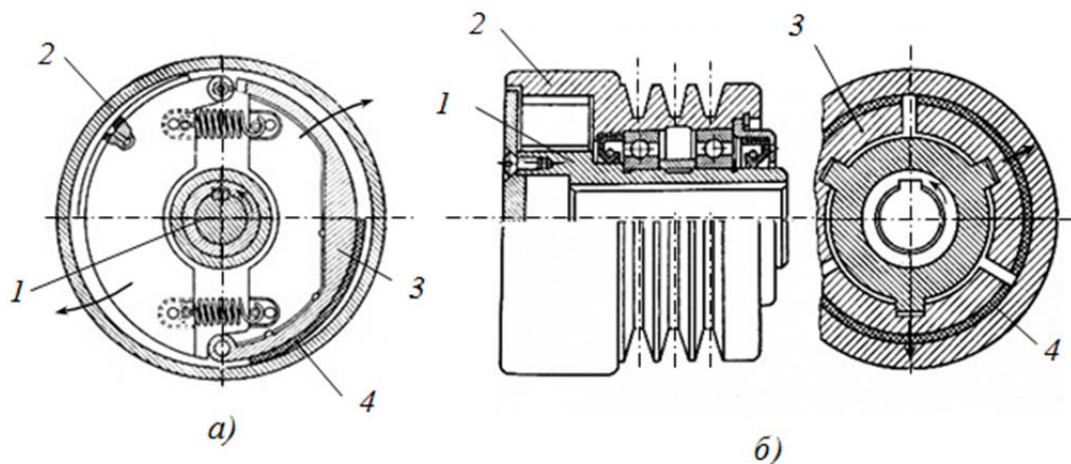


Рис. 2.82. Схеми відцентрових муфт з пружинами (а) та з направляючими пазами (б): 1 – ведуча напівмуфта; 2 – корпус веденої напівмуфти; 3 – вантажі (колодки); 4 – фрикційні накладки.

Вибір стандартних муфт проводиться за призначенням, за кутовою швидкістю та моментом, який передається муфтою:

$$T = k_p T_H, \quad (2.219)$$

де T_H – номінальний момент тривалої дії,

k_p – коефіцієнт режиму роботи (при спокійній роботі та невеликих масах $k_p=1,1 \dots 1,4$, при змінному навантаженні та середніх масах $k_p=1,5 \dots 2,0$, при ударних навантаженнях та великих масах $k_p=2,5 \dots 3,0$).

Питання для самоконтролю

1. Наведіть класифікацію муфт приводів за їх призначенням.
2. Поясніть конструкцію фланцевої глухої муфти.



3. Вкажіть недоліки глухих муфт.
4. Які види зсувів валів компенсують зубчасті муфти? Зобразіть конструкцію зубчастої компенсуючої муфти.
5. В яких випадках застосовують пружні муфти?
6. Опишіть будову та принцип дії дискової фрикційної муфти зчеплення.
7. Вкажіть види запобіжних муфт.
8. Поясніть конструкцію і опишіть принцип дії роликової обгінної муфти.
9. За якими ознаками підбирають стандартні муфти?

2.2.12. Роз'ємні з'єднання деталей машин

З'єднання деталей машин поділяють на рухомі і нерухомі. Наявність рухомих зв'язків у механізмах і машинах (кінематичні пари – наприклад, різні шарніри, зубчасте зачеплення) обумовлена їх кінематичними схемами.

Формування нерухомих зв'язків визначається необхідністю розділення загальної конструкції технічного засобу на вузли і деталі для спрощення виробництва, полегшення складання, ремонту та транспортування. Нерухомі зв'язки мають назву з'єднання.

За ознакою роз'ємності усі види з'єднань можна розділити на роз'ємні і нероз'ємні. До роз'ємних з'єднань, які можуть розбиратися без руйнування деталей, що їх складають, належать: різьбові з'єднання, шпонкові з'єднання, шліцьові з'єднання, профільні з'єднання, штифтові з'єднання, клинові з'єднання.

До нероз'ємних з'єднань, які не можуть розбиратися без руйнування деталей, що з'єднуються, або їх поверхонь, належать: зварні з'єднання, заклепкові з'єднання, з'єднання із натягом, паяні з'єднання, клейові з'єднання.

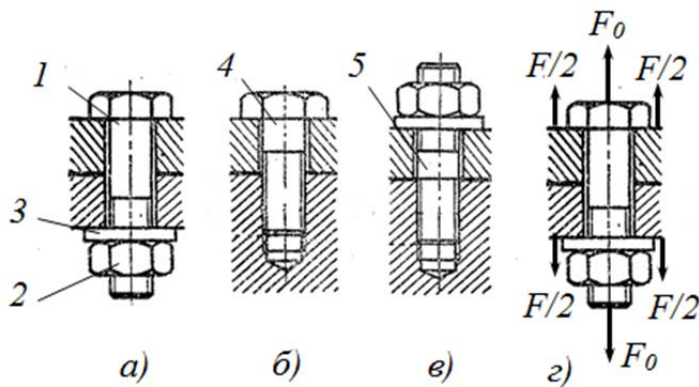


Рис. 2.83. Види різьбових з'єднань: болтове (а), гвинтове (б), шпилькове (в), та розрахункова схема болтового з'єднання (г);
1 – болт; 2 – гайка; 3 – шайба; 4 – гвинт; 5 – шпилька.

Різьбові з'єднання є одними з найбільш поширених роз'ємних з'єднань, які виконуються за допомогою деталей, що мають зовнішню (болти, гвинти, шпильки та інші) і внутрішню (гайки, різьбові отвори в корпусних деталях) різьбу (рис. 2.83).

До переваг різьбових з'єднань слід віднести високу надійність, зручність складання та розбирання, можливість утворення великих осьових навантажень, відносно невелику вартість, що обумовлюється стандартизацією та масовим виробництвом кріпильних різьбових деталей.

Недоліком слід вважати наявність концентраторів напружень у западинах різьби, що знижує втомлену міцність різьбового з'єднання, а також необхідність застосування у багатьох випадках засобів стопоріння (для запобігання саморозгвинчуванню з'єднання).

Різьбові з'єднання виконують із застосуванням кріпильних деталей, до яких належать болти та шпильки з гайками, гвинти. При необхідності різьба нарізується на сполучених поверхнях деталей, що з'єднуються (наприклад, з'єднання труб).

Під дією сил тертя між витками різьби та на опорній поверхні гвинта або гайки, зовнішніх осьових сил F , зусилля попереднього затягування з'єднання F_0 (приймається $F_0 \approx 1,3F$) стержень гвинта піддається деформаціям кручення та розтягування, а витки різьби – деформаціям зсуву та згинання.

При статичному навантаженні характерними є два типи руйнування різьбових з'єднань – обрив стержня болта (частіше) та зрізання витків різьби.

З урахуванням зусилля попереднього затягування діаметр стержня (внутрішній діаметр різьби) визначається за формулою:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot (F_0 + \chi F)}{\pi \cdot [\sigma]}}, \quad (2.220)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження, яке визначається за формулою:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}, \quad (2.221)$$

де n – коефіцієнт запасу міцності (для гвинтів середніх діаметрів $n=1,5 \dots 3$, для гвинтів малих діаметрів $n=4 \dots 5$);

χ - коефіцієнт зовнішнього навантаження F , який враховує частку навантаження, що припадає на болт при спільній деформації болта та деталей стику (при з'єднанні без прокладки $\chi = 0,2 - 0,3$; з пружною прокладкою – $\chi = 0,4 - 0,5$).

Перевірка міцності різьби на зрізання виконується за формулою:

$$\tau = \frac{F_0 + \chi F}{\pi \cdot d_1 \cdot H \cdot k \cdot m} \leq [\tau_{зр}], \quad (2.222)$$

де H – висота гайки;

k – коефіцієнт повноти різьби, який залежить від типу різьби (наприклад, для трикутної різьби $k = 0,75$);

m – коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження;

$[\tau_{зр}]$ – допустиме напруження зрізання, $[\tau_{зр}] = (0,2 \dots 0,3) \sigma_T$.

Шпонкове з'єднання (рис. 2.84) утворюється за допомогою спеціальної деталі – шпонки, яка закладається у пази, які виконані на поверхнях деталей, що з'єднуються. Воно забезпечує нерухоме скріплення деталей для передачі крутного моменту.

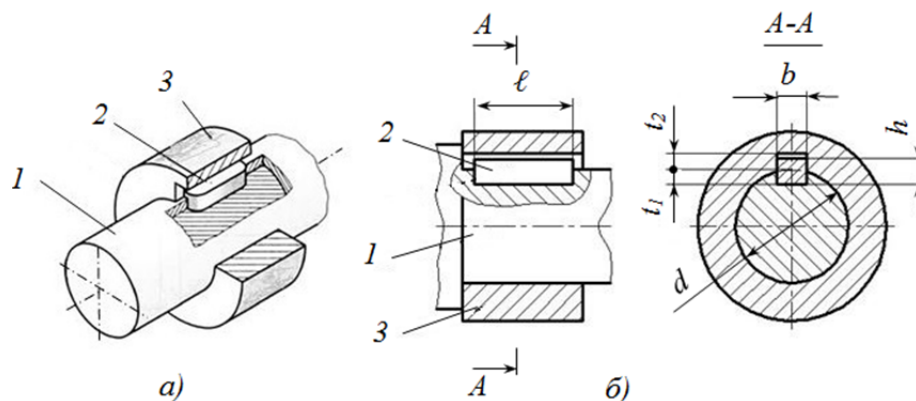


Рис. 2.84. Загальний вигляд (а) та креслення шпонкового з'єднання (б):
1 – вал; 2 – шпонка (призматична); 3 – втулка.

До переваг шпонкових з'єднань слід віднести простоту і надійність конструкції, зручність складання і розбирання, невисоку вартість. Недоліки з'єднання визначаються ослабленням суцільних перерізів деталей, що з'єднуються, і наявністю концентраторів напружень. Тому, з метою обмеження послаблення деталей, розміри шпонкових з'єднань стандартизовані. Розміри (товщина b , висота h шпонки та глибина пазів t_1, t_2) визначаються за стандартом у залежності від діаметра валу, а також типу шпонки.

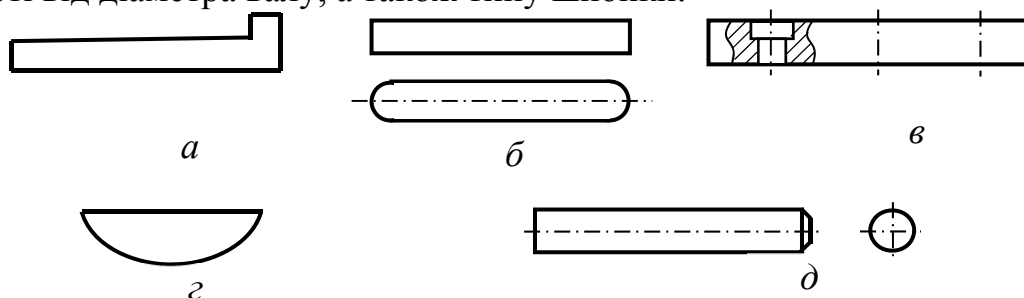


Рис. 2.85. Типи шпонок: клинова врізана (а), призматична (б), призматична напрямна (в), сегментна (г), кругла (д).

Найбільш поширені у машинобудівних конструкціях такі типи шпонок (рис. 2.85):

– клинова врізана, створює напружений стан за верхньою та нижньою гранями шпонки і передає крутний момент за рахунок сил тертя на них (рис. 2.85,а);

– призматична звичайна із заокругленими кінцями, сприймає навантаження бічними гранями (рис. 2.85,б);

– призматична напрямна врізана із закріпленням на валу, допускає переміщення втулки вздовж осі валу (рис. 2.85, в);

– сегментна (рис. 2.85, г);

– кругла (не стандартизована) (рис. 2.85, д).

Призматичні звичайні шпонки працюють на зминання бокових граней та зрізання. Розміри поперечного перерізу шпонки ($b \times h$) вибираються з таблиць стандарту залежно від діаметру валу d . Довжина шпонки визначається з умов

попередження зминання та зрізання. При заданому крутному моменті T потрібна довжина шпонки l визначається за поданими нижче формулами:

$$\text{за умови попередження зминання } l = \frac{4T}{h \cdot d \cdot [\sigma_{зм}]} \quad (2.223)$$

$$\text{за умови попередження зрізання } l = \frac{2T}{b \cdot d \cdot [\tau_{зр}]} \quad (2.224)$$

де $[\sigma_{зм}]$, $[\tau_{зр}]$ – допустимі напруження зминання і зрізання.

З двох значень довжини шпонки потрібно вибрати більше.

Для виготовлення шпонок застосовується прокат зі сталей з границею міцності не нижче 500 МПа. При сталій втулці приймається $[\sigma_{зм}] = 80 \dots 100$ МПа, при чавунній втулці приймається $[\sigma_{зм}] = 45 \dots 55$ МПа. Значення $[\tau_{зр}]$ приймається в залежності від характеру навантаження – для спокійного навантаження $[\tau_{зр}] = 120$ МПа, для помірних поштовхів $[\tau_{зр}] = 85$ МПа, для ударного навантаження $[\tau_{зр}] = 50$ МПа.

Шліцьове з'єднання (рис. 2.39) – це з'єднання валу і втулки за допомогою шліців і зубів, що радіально розташовані на поверхні валу. Умовно шліцьове з'єднання можна уявити як багатошпонкове, у якого шпонки виготовлені безпосередньо на валу. Таке з'єднання має велику міцність, призначається для передачі значних крутних моментів, забезпечує співвісність валу і втулки, з можливістю осевого переміщення деталі уздовж осі. Найбільше використовується у коробках передач.

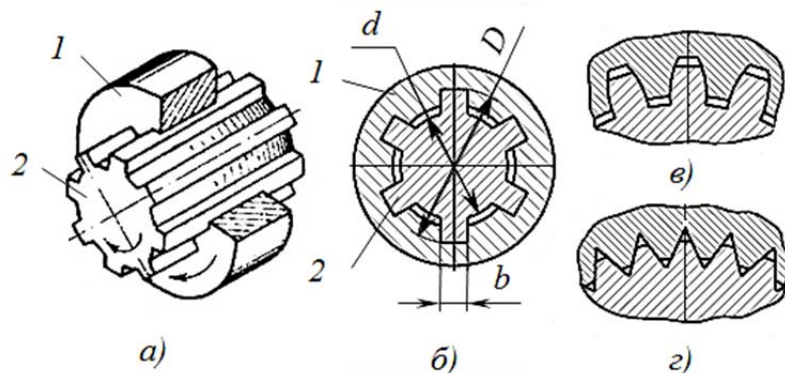


Рис. 2.86. Загальний вигляд (а) та розрізи шліцьових з'єднань: прямокутних(б), евольвентних(в), трикутних(г):
1 – маточина(наприклад зубчастого колеса); 2 – вал.

До переваг шліцьових з'єднань слід віднести більшу міцність шліцьових валів у порівнянні зі шпонковими, а також краще центрування деталей. Недоліком слід вважати складність виготовлення деталей шліцьового з'єднання і збільшення кількості концентраторів напружень.

Шліцьові з'єднання розрізняють за формою шліців (рис. 2.86) на: прямокутні, евольвентні і трикутні.

Шліцьове з'єднання розраховується на зминання бокових граней шліців за виразом:

$$\sigma_{зм} = \frac{4T\psi}{zh\ell(D+d)} \leq [\sigma_{зм}] \quad (2.225)$$



де, T - крутний момент, що передає з'єднання;

ψ - коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження між шліцями,
 $\psi=1,2\dots1,3$;

z - число шліців;

h - висота поверхні контакту;

ℓ - робоча довжина шліца, яка дорівнює довжині маточини деталі, що з'єднується з валом;

$[\sigma_{зм}]$ - допустиме напруження зминання (для нерухомих з'єднань $[\sigma_{зм}]=100\dots140$ МПа, а для рухомих під навантаженням - $[\sigma_{зм}] = 5\dots15$ МПа).

Профільні з'єднання. У профільному з'єднанні охоплююча та охоплювана поверхні деталей мають профіль перерізу, що відрізняють від кола (рис. 2.87). Внаслідок чого забезпечується передача великих крутних моментів без використання додаткових деталей (наприклад, з'єднання корабельного гребного гвинта з кінцевим валом).

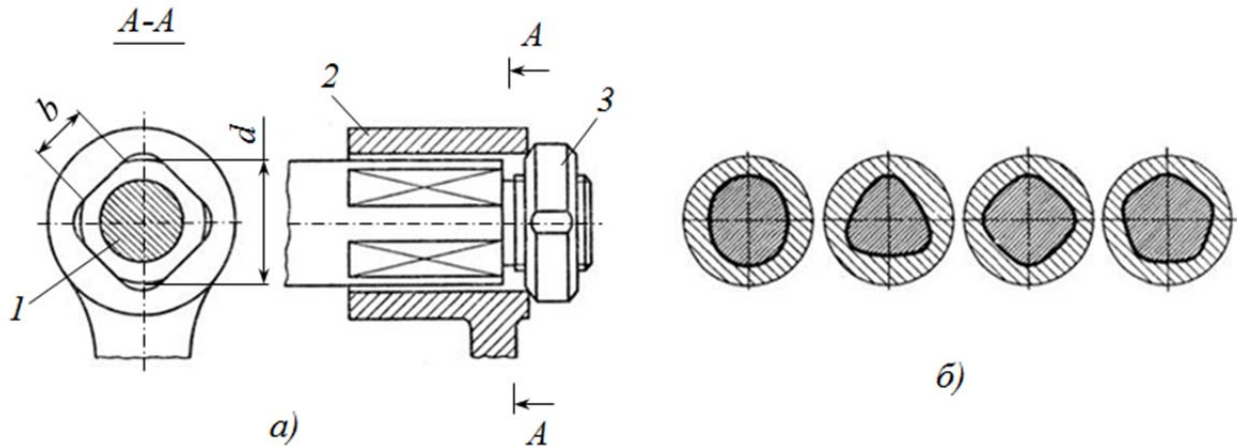


Рис. 2.87. Профільне з'єднання на квадрат (а) та види профільних з'єднань за формою(б): 1 - вал; 2 - маточина; 3 - вузол фіксації з'єднання.

У порівнянні зі шпонковими та шліцьовими з'єднаннями профільне відрізняється меншою концентрацією напружень і кращим центруванням. Недолік з'єднання полягає у складності виготовлення профільних сполучених поверхонь.

Профільне з'єднання зі складним контуром розраховується за напруженнями зминання на робочих поверхнях. Для з'єднання на квадраті (рис. 2.59,а) приймають $b=0,75d$. Умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{3T}{b^2 \ell} \leq [\sigma_{зм}]. \quad (2.226)$$

Рекомендується приймати довжину з'єднання $\ell=d\dots2d$, а допустиму напругу для термообробленої сталі $[\sigma_{зм}] = 140$ МПа.

Штифтове з'єднання (рис. 2.88) виконується за допомогою додаткової деталі - штифта. Штифтове з'єднання застосовується при передачі невеликих навантажень. З'єднання використовується для передачі осьового навантаження (рис. 2.88,б,в) або крутного моменту (рис. 2.88,г,д), а також для забезпечення точного взаємного розташування деталей, що з'єднуються.

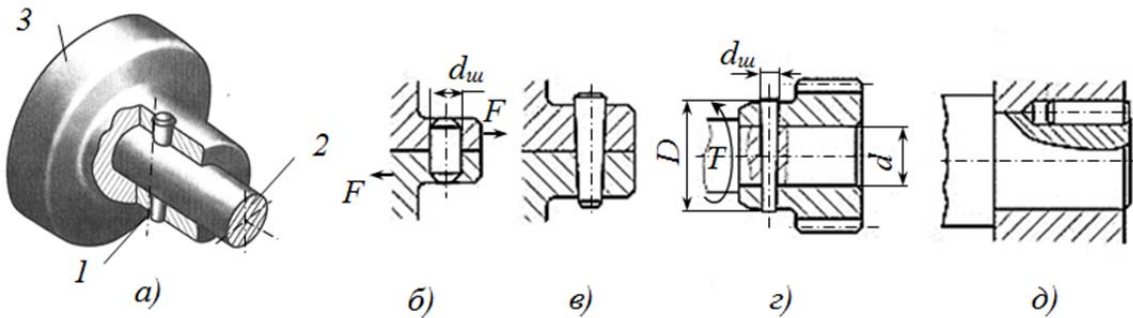


Рис. 2.88. Штифтові з'єднання: загальний вигляд (а), схеми з'єднань штифтами (б-д); 1 – штифт; 2 – вал; 3 – маточина деталі.

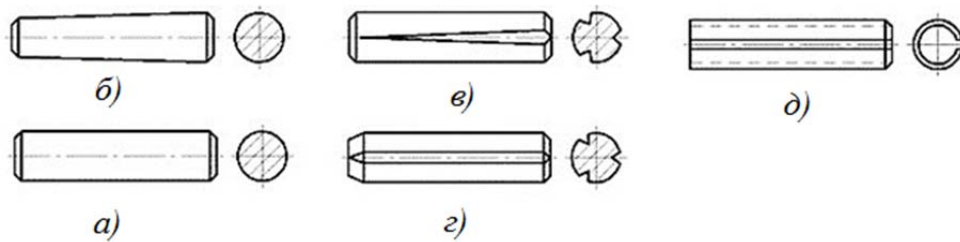


Рис. 2.89. Види штифтів: циліндричний гладкий (а); конічний (б); просічні (в,г); пружинний (д).

Штифти бувають двох типів:

- кріпильні;
- установчі.

Залежно від форми розрізняють (рис. 2.89):

- конічні;
- циліндричні.

Конічні штифти забезпечують самогальмування. Їх виготовляють з конусністю 1:50.

За видом поверхні робочої частини штифти виготовляють:

- гладкі;
- просічні.

Просічні - це штифти з нанесеними чи видавленими канавками. У цьому випадку не потрібне розгортання отворів під штифти (як на гладких штифтах). Канавки на штифтах створюють надійне зчеплення, що попереджує їх випадання під час роботи.

Перевагами штифтових з'єднань є простота конструкції, зручність монтажу. До недоліків слід віднести послаблення основних деталей отворами під штифти, нетехнологічність конструкції та обмеження навантажень, що передаються.

Штифти розраховуються на зрізання та зминання.

При дії сили осьового зміщення (рис. 2.88,б) умови міцності мають вигляд:

$$\tau = \frac{4k_p F}{\pi \cdot d_u^2} \leq [\tau_{zp}], \quad (2.227)$$



$$\sigma = \frac{k_p F}{d_{\text{ш}} \cdot \delta_{\text{min}}} \leq [\sigma_{\text{зм}}], \quad (2.228)$$

де k_p – коефіцієнт режиму навантаження ($k_p=1 \dots 2$);

δ_{min} - найменша товщина деталі.

При передачі крутного моменту T (рис. 2.88, з) умови міцності мають вигляд:

$$\tau = \frac{4k_p T}{\pi \cdot d_{\text{ш}}^2 \cdot d} \leq [\tau_{\text{зр}}], \quad (2.229)$$

$$\sigma = \frac{2T}{d_{\text{ш}} \cdot d \cdot (D - d)} \leq [\sigma_{\text{зм}}]. \quad (2.230)$$

Для виготовлення штифтів використовуються сталі 30, 35, 45, 50. Відповідно до цього можна приймати $[\sigma_{\text{зм}}]=140 \text{ МПа}$ і $[\tau_{\text{зр}}]=80 \text{ МПа}$.

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняються шпилькове та болтове з'єднання?
2. На які види деформації розраховують болтові з'єднання?
3. Вкажіть галузь використання шліцьових з'єднань.
4. Поясніть конструкцію профільних з'єднань.
5. Вкажіть види штифтів. Наведіть приклади використання.

2.2.13. Нероз'ємні з'єднання

Зварні з'єднання. Зварювання - процес отримання нероз'ємних з'єднань за допомогою встановлення міжатомних зв'язків між частинами, які зварюються, при їх місцевому або загальному нагріванні, пластичній деформації або спільній дії того й іншого. Найчастіше за допомогою зварювання з'єднують деталі з металів. Однак зварювання застосовують і для неметалів - пластмас, кераміки або їх поєднання.

Зварне з'єднання вважається найбільш досконалим нероз'ємним з'єднанням. До його переваг належать рівна міцність вздовж сполучених поверхонь, економія матеріалів і зменшення маси у порівнянні з заклепковими з'єднаннями, висока продуктивність і технологічність процесу зварювання. Недоліками з'єднання вважаються виникнення температурних напружень і їх концентрація, а також жолоблення тонкостінних деталей.

Найбільш поширеними способами зварювання є електродугове, електроконтактне та газове (хімічне). Також застосовують нові способи зварювання – тертям, вибухом, ультразвуком та ін.

При електродуговому зварюванні під дією тепла електричної дуги оплаваються сполучені поверхні і їх метал разом з металом електроду, який обмазується захисним покриттям або під шаром флюсу, утворюють міцний шов. Таким способом зварюються конструкційні сталі будь-яких марок. Електродугове зварювання високолегованих сталей, а також сплавів на основі алюмінію, міді, молібдену проводиться в середовищі захисного газу – аргону

або гелію. Метал практично необмеженої товщини дозволяє зварювати електрошлакове зварювання.

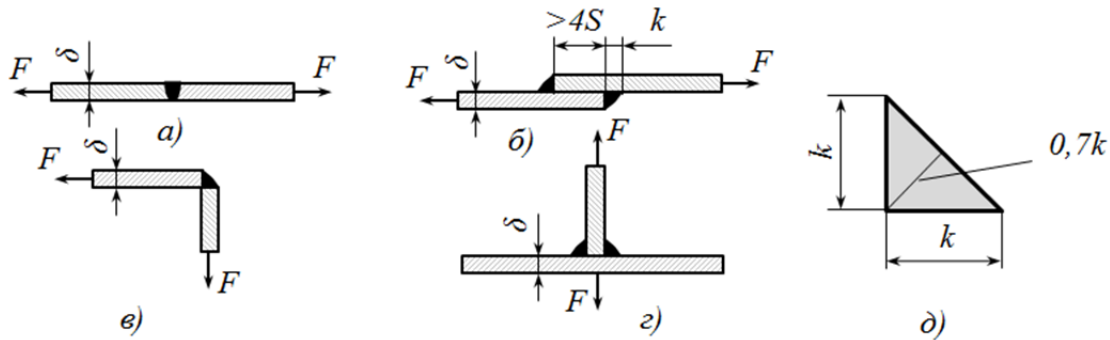


Рис. 2.90. Схеми зварних з'єднань: у стик (а), у напустку (б), кутове (в), таврове (г), переріз зварного шва (д).

При газовому зварюванні розігрівання поверхонь, що з'єднуються, і прутка присаджувального матеріалу забезпечується згоранням газу у струмені кисню. Таке зварювання застосовується для герметичного з'єднання деталей відносно малої товщини.

При електродуговому зварюванні залежно від взаємного розташування деталей відрізняються з'єднання у стик (рис. 2.90,а), у напустку (рис. 2.90,б), таврові (рис. 2.90,в) та кутові (рис. 2.90,г). При збільшенні товщини деталей потребується додаткова обробка поверхонь.

При розрахунках з'єднань у стик, які навантажуються розтягувальною силою F , перевіряється умова міцності за нормальними напруженнями розтягу:

$$\sigma = \frac{F}{\delta \cdot \ell} \leq [\sigma'], \quad (2.231)$$

де δ – товщина зварюваних деталей;

ℓ – довжина зварювального шва;

$[\sigma']$ – допустиме нормальне напруження зварювального шва (приймається $[\sigma'] \approx [\sigma]$ для матеріалу деталей).

При розрахунках для з'єднань у напустку, навантажених силою F , перевіряється умова міцності на зріз. Вважають, що руйнування зварних швів внаслідок зрізу відбувається в площині, яка проходить скрізь бісектрису прямого кута (рис. 2.90,д). Тоді:

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot 0,7k \cdot \ell} = \frac{F}{1,4k\ell} \leq [\tau'], \quad (2.232)$$

де k – катет зварювального шва,

$[\tau']$ – допустиме дотичне напруження зварювального шва, приймається $[\tau'] \approx 0,65[\sigma]$.

На рисунку 2.91 зображено з'єднання двох листів у напустку лобовими та фланговими швами.

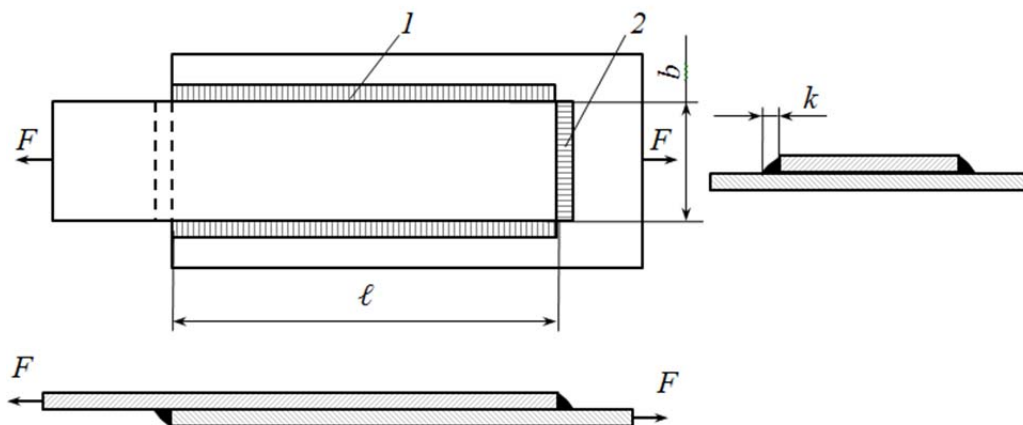


Рис. 2.91. – Зварне з’єднання двох листів у напустку:
1 – фланговий шов; 2 – лобовий шов.

Умова міцності для цього випадку зварного з’єднання має вигляд:

$$\tau = \frac{F}{0,7k\ell_p} \leq [\tau], \quad (2.231)$$

де ℓ_p – розрахункова довжина шва.

Для нашого випадку з урахуванням розподілу навантаження між фланговими та лобовим швами рекомендується приймати:

$$\ell_p = 0,3b + 1,5\ell. \quad (2.232)$$

Заклепкові з’єднання. Заклепкове з’єднання виконується з використанням додаткової деталі – заклепки (рис. 2.92).

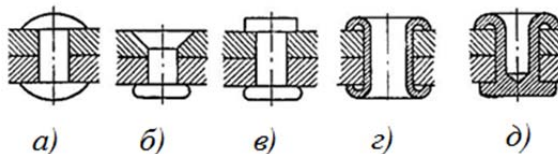


Рис. 2.92. Види заклепок:

а - з напівкруглою головкою; *б* - з потайною головкою; *в* - з циліндричною головкою; *г* - пустотіла двостороння (пістон);, *д* - пустотіла одностороння.

Форма та розміри заклепок стандартизовані. У деяких випадках при формуванні з’єднання у одній з деталей встановлюється суцільна або пустотіла (пістон) цапфа (рис. 2.92д,г). Для виготовлення заклепок застосовуються сталі марок Ст. 2, 3, 10, а також алюмінієві і мідні сплави.

У порівнянні зі зварними з’єднаннями переваги заклепкових полягають у можливості з’єднання деталей, що не можна нагрівати до високих температур, менших руйнуваннях деталей при розбиранні, а також меншій концентрації напружень, внаслідок краща міцність з’єднань при дії вібрації. Недоліками є мала продуктивність технологічного процесу, великі витрати металу, більша вартість. Заклепкові з’єднання широко використовуються у машинобудуванні (найбільш авіабудуванні), будівельних конструкціях, приладах та у виробі легкої промисловості.

До основних типів заклепкових з'єднань належать з'єднання у напустку (рис. 2.93,а), з одною (рис. 2.93,б) та двома накладками(рис. 2.93,в). Також застосуються однорядні, дворядні та інші типи заклепкових з'єднань.

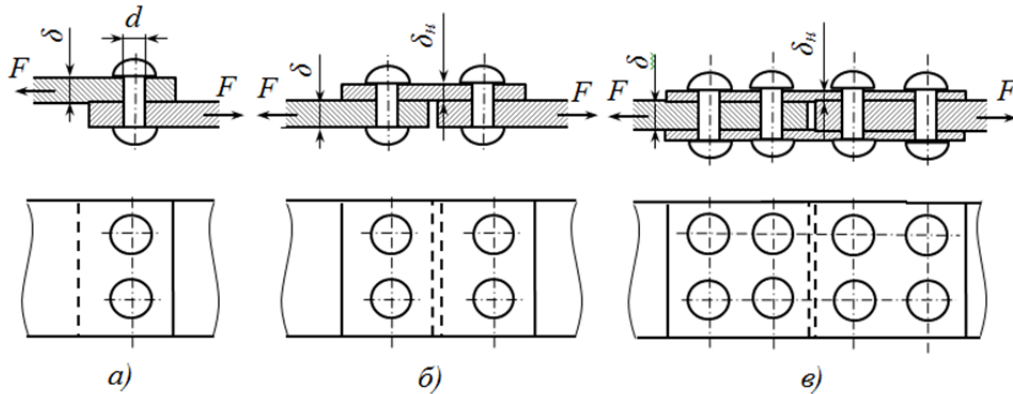


Рис. 2.93. Основні види заклепкових з'єднань.

Заклепки у з'єднаннях, на які діють осьові сили (рис. 2.93), розраховуються на зрізання і перевіряються на зминання. Умова міцності при розрахунках на зрізання перевіряється за формулою:

$$\tau = \frac{4F}{z \cdot \pi \cdot d^2} \leq [\tau_{зр}], \quad (2.233)$$

де F – навантаження на деталі, що з'єднуються;
 z – кількість площин зрізання.

Отвори у листах, що склепуються, виконують діаметром на 0,5-1мм більше діаметра заклепки. У розрахункові формули входить діаметр отвору, бо у виконаному з'єднанні заклепка практично повністю заповнює отвір.

Умова міцності при розрахунках на зминання перевіряється за формулою:

$$\sigma = \frac{F}{z \cdot \delta_{\min} \cdot d} \leq [\sigma_{зм}], \quad (2.234)$$

де δ_{\min} – мінімальна товщина деталей, що з'єднуються (листа або накладки).

Величини допустимих напружень призначаються залежно від матеріалу заклепок і способу обробки отворів під них. Наприклад, для сталених заклепок (сталі марок Ст.2, 3) при отворах, що отримують свердлінням, приймаються $[\tau_{зр}] = 140 \text{ МПа}$ і $[\sigma_{зм}] = 300 \text{ МПа}$.

З'єднання з натягом забезпечує нерухоме скріплення деталей за рахунок сил тертя, що виникають між охоплюючою та охоплюваною поверхнями при складанні деталей за посадками з натягом. Такий спосіб з'єднання застосовують для з'єднання валів із зубчастими колесами або бандажів черв'ячних коліс з маточинами.

Для утворення з'єднання вал виготовляють з дійсним розміром d трохи більшим (на 5-200 мкм у переважних посадках) діаметру втулки D . Після складання з'єднання пресуванням або термічним методом відбуваються пружні деформації деталей: діаметр валу зменшується на Δd , а втулки - збільшується на ΔD (рис.2. 94).

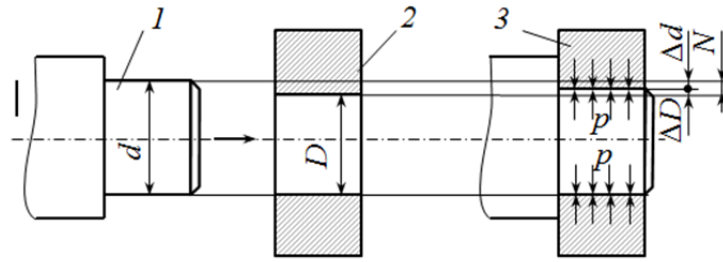


Рис. 2.94. Схема з'єднання з натягом:
1 – вал; 2 – втулка; 3 – з'єднання після складання.

Внаслідок між поверхнями валу та втулки виникає тиск p , який породжує силу тертя, що забезпечує нерухомість з'єднання та передачу зусиль між деталями. Зрозуміло, що тиск (а відповідно сила тертя) будуть залежати від початкової різниці діаметрів валу і втулки N – натягу. Чисельне значення тиску визначається за формулою Ляме:

$$p = \frac{N}{d_n \left(\frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2} \right)}, \quad \text{кПа} \quad (2.235)$$

де, d_n — номінальний діаметр з'єднання, мм;

E_1 і E_2 — модулі пружності матеріалів втулки та валу, МПа;

C_1 і C_2 — коефіцієнти Ляме, які визначають за геометричними розмірами валу та втулки :

$$C_1 = \frac{1 + \left(\frac{d_1}{d_n} \right)^2}{1 - \left(\frac{d_1}{d_n} \right)^2} - \mu_1, \quad C_2 = \frac{1 + \left(\frac{d_n}{d_2} \right)^2}{1 - \left(\frac{d_n}{d_2} \right)^2} + \mu_2, \quad (2.236)$$

де d_n , d_1 і d_2 — відповідно номінальний діаметр з'єднуваних поверхонь вала та втулки й діаметри внутрішнього отвору у валу та зовнішньої поверхні втулки, мм;

μ_1 і μ_2 — коефіцієнти Пуассона (для сталей $\mu=0,25-0,3$; для чавунів $\mu=0,25-0,27$, для бронзи $\mu=0,33-0,35$ тощо).

Нерухомі з'єднання з натягом розраховують, виходячи з необхідності задоволення двох умов — міцності деталей (на розтяг для зовнішньої деталі та стиск — внутрішньої) та міцності їх зчеплення з умови передавання заданого навантаження від однієї до другої деталей.

Щоб забезпечити нерухомість з'єднання, створюють необхідний питомий тиск між поверхнями з'єднуваних деталей. Він визначається за умови передачі заданих навантажень від валу до втулки чи навпаки.

$$p \geq \frac{R}{\pi \cdot d_n \cdot \ell \cdot f}, \quad (2.237)$$

де, p — питомий тиск між поверхнями валу та втулки, МПа;

R — рівнодійна сила, що передається від валу до втулки, кН;

d_n - номінальний діаметр з'єднання, мм;

l — довжина спільної поверхні контакту між валом та втулкою, m ;
 f — коефіцієнт тертя (зчеплення) між поверхнями валу та втулки.
 Рівнодійна сила розраховується:

$$R = \sqrt{F_{oc}^2 + (2 \cdot M_{кр} / d_n)^2}, \quad \text{кН} \quad (2.238)$$

де F_{oc} — осьова сила, $кН$;

$M_{кр}$ — крутний момент, $кН \cdot м$.

Коефіцієнт тертя у з'єднаннях з натягом залежить від матеріалів валу та втулки, шорсткості їх поверхонь, наявності між ними мастила, забруднень поверхонь, температури матеріалів тощо. За результатами експериментів встановлено, що для сталі та чавуну без мастила $f = 0,12 \dots 0,15$; для змащених поверхонь $f = 0,05 \dots 0,08$; для запресування деталей у холодному стані приймають $f = 0,08$, а для запресування їх у нагрітому стані $f = 0,14$.

Необхідний мінімальний натяг для отримання у з'єднанні тиску p_{min} з формули Ляме:

$$N_{min} = p_{min} \cdot d_n \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) \cdot 10^3, \quad \text{мкМ} \quad (2.239)$$

де p_{min} — питомий тиск на поверхні контакту валу та втулки, $МПа$.

Другою умовою працездатності з'єднань з натягом є їх здатність протистояти руйнуванню деталей. За теорією найбільших дотичних напружень умовою міцності деталей є відсутність пластичних деформацій, тобто внутрішні напруження не мають перевищувати граничні величини для їх матеріалів. Найбільші допустимі напруження у втулці та валу визначають за межею текучості матеріалу втулки і валу:

$$p_{max,2} = 0,58 \cdot \sigma_{m,2} \left(1 - \frac{d_n^2}{d_2^2} \right), \quad \text{для втулки} \quad \text{МПа} \quad (2.240)$$

$$p_{max,1} = 0,58 \cdot \sigma_{m,1} \left(1 - \frac{d_1^2}{d_n^2} \right), \quad \text{для валу} \quad \text{МПа} \quad (2.241)$$

де $p_{max,2}$ і $p_{max,1}$ — граничні допустимі тиски відповідно для втулки та валу, $МПа$;

$\sigma_{m,2}$ і $\sigma_{m,1}$ — межі текучості матеріалів, відповідно втулки та валу, $МПа$.

За величиною найменшого допустимого тиску визначають максимальний допустимий натяг визначається:

$$N_{max,\phi} = p_{max,\phi} \cdot d_n \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) \cdot 10^3, \quad \text{мкМ} \quad (2.242)$$

Стандартну посадку обирають так, щоб мінімальний натяг стандартної посадки був більший за розрахунковий мінімальний натяг з урахуванням змінання мікронерівностей при збиранні з'єднання. Поряд з цим максимальний натяг стандартної посадки не повинен перебільшувати максимальний допускний, тобто:

$$N_{min,cm} \geq N_{min} + \Delta N; N_{max,cm} \leq N_{max,\phi}. \quad (2.243)$$

Наближене значення поправки на змінання:

$$\Delta N = k (R_{z,2} + R_{z,1}), \quad (2.244)$$



де ΔN — додатковий натяг у з'єднанні для компенсації змінання нерівностей шорсткості поверхонь валу та втулки, мм;

k — коефіцієнт, що враховує матеріал з'єднуваних деталей, способи отримання поверхонь, їх температуру, методи збирання, наявність на поверхнях мастила тощо ($k = 0,4 \dots 0,9$, більші значення – для м'яких матеріалів та при запресуванні деталей; менші – при наявності мастил та при термічній збірці);

$R_{z,2}$ і $R_{z,1}$ — висота нерівностей поверхонь відповідно втулки та валу за параметром R_z , мкм.

Окрім гладких у таких з'єднаннях іноді застосовують деталі з накаткою на поверхнях. Надійність з'єднання при цьому забезпечується за рахунок вдавнення зубців накатки у циліндричну поверхню сполученої деталі.

Паяні з'єднання. При паянні деталі з'єднуються розплавленим припоєм. Паяння — це процес виготовлення нероз'ємного з'єднання деталей з нагріванням нижче температури їх автономного плавлення за рахунок змочування, розтікання й заповнення зазору між ними розплавленим припоєм і зчеплення деталей при кристалізації шва.

Паяння широко застосовують у різних галузях промисловості. У машинобудуванні його використовують при виготовленні лопаток і дисків турбін, трубопроводів, радіаторів, ребер двигунів повітряного охолодження, рам велосипедів, посудин промислового призначення, газової апаратури тощо.

У електропромисловості та приладобудуванні паяння є в ряді випадків єдиною можливим методом з'єднання деталей. Його застосовують при виготовленні електро - і радіоапаратури, телевізорів, деталей електромашин, плавких запобіжників тощо.

До переваг паяння належать: зберігання структури й механічних властивостей металу, достатня міцність з'єднання, герметичність, чистота з'єднання, яка не потребує найчастіше наступної обробки, малі остаточні деформації та збереження розмірів і форми деталі, відносна простота і технологічність процесу. Сучасні способи дають змогу паяти вуглецеві, леговані й нержавіючі сталі, кольорові метали та їх сплави. До недоліків слід віднести невисоку механічну та термічну міцність, високу вартість припоїв і флюсів.

Відрізняють легкоплавкі (м'які) припої з температурою плавлення до 300°C і тугоплавкі (тверді) припої з температурою плавлення більше 500°C . Поширеними м'якими припоями є сплави олова та свинцю - ПОС (зі змістом олова 18...90%; наприклад, припой ПОС-60 містить 60% олова і близько 40% свинцю); олова, свинцю та кадмію - ПОСК; олова, свинцю та вісмуту – ПОСВ. Такі припої застосовують для паяння міді, сплавів, сталі.

Тверді припої застосовуються для паяння міді, сталей, нержавіючих сталей. До складу твердих припоїв можуть входити такі складові: срібло, мідь, кадмій (ПСр50Кд34); мідь і нікель (ПН25) та ін. Такі припої забезпечують шви з відносно високими механічною та термічною міцністю.

З підвищенням температури швидкість окислення поверхонь деталей, що паяються, значно зростає, в результаті чого припой не пристає до деталі. Для видалення оксиду застосовують хімічні речовини, які називаються флюсами.

Флюси поліпшують умови змочування поверхні металу, що паяються, розплавленим припоєм, захищають поверхню паяного металу та розплавленого припою від окислення при нагріванні та в процесі паяння, розчиняють існуючі на поверхні металу та припою оксидні плівки. Розрізняють флюси для м'яких і твердих припоїв, а також для паяння алюмінієвих сплавів, нержавіючих сталей і чавуну.

До флюсів м'яких припоїв належать хлористий цинк, нашатир, каніфоль, паяльні пасти тощо. При паянні нержавіючих і жароміцних сталей застосовують суміш з 50 % плавленої бури і 50 % борної кислоти, розчинених у розчині хлористого цинку до густої пасти. При паянні сірого чавуну до бури додають хлористий калій, перекис марганцю або оксид заліза.

Флюси для твердих припоїв. До цих флюсів належать бура, борна кислота та деякі інші речовини. Для паяння алюмінієвих сплавів застосовують флюси складні за хімічним складом – суміші: фтористого натрію, хлористих літію, калію, цинку та ін.

Клейові з'єднання. З'єднання конструкційних матеріалів склеюванням широко використовується у різних галузях: деревообробці та меблевому виробництві, будівництві, машинобудуванні. Основною перевагою цього з'єднання є їх щільність, можливість склеювання різнорідних металічних і неметалічних матеріалів у різноманітних сполученнях. Недоліком є низька теплостійкість (60°C для більшості клеїв і 250°C для теплостійких клеїв), а також невисока міцність.

Клей — розчин, дисперсія чи розплав переважно високомолекулярних органічних або неорганічних речовин природних або штучних, які застосовують для з'єднання (склеювання) матеріалів. З'єднання відбувається внаслідок утворення між поверхнями, що склеюються, та клейовим прошарком міцних адгезійних зв'язків, обумовлених міжмолекулярною та міжатомною взаємодією. Адгезійні зв'язки посилюються взаємною дифузією атомів матеріалів, що контактують.

Вибір клею здійснюється залежно від виду матеріалів, що склеюються, і робочих температур. Так, клеї марок БФ-2 і БФ-4 (розчини синтетичних смол у спирті або ацетоні) застосовуються для склеювання металів і сплавів між собою та неметалічними матеріалами. Епоксидні клеї ЕД-5, ЕД-6 використовуються для склеювання сталі, міді, алюмінію та його сплавів, пластмас. У електро- та приладобудуванні використовуються епоксидний К-8 і фенол-вінілацетатний ВК-20 струмопровідні клеї, ціаноакрилат. У деревооброблювальній та меблевій промисловості використовують полівінілацетаті (ПВА), фенолформальдегідні, полівінілацетатні та інші клеї. У швейній галузі найчастіше використовують клеї БФ-6, ПВБ, полівінілхлоридний пластикат, пасту на основі полівінілхлоридної смоли П-548 та поліетилен високого тиску.

Питання для самоконтролю

1. *Вкажіть види зварних з'єднань.*
2. *Поясніть переваги та недоліки зварних з'єднань.*
3. *У чому полягає методика розрахунку зварних з'єднань?*



4. У яких випадках доцільно використовувати заклепкові з'єднання?
5. На які види деформації розраховують заклепкові з'єднання?
6. Від чого залежить величина сил тертя, що перешкоджають відносному зсуву деталей у з'єднаннях з натягом?
7. Яким умовам повинні задовільняти граничні значення натягів пресової посадки для з'єднання деталей?
8. Наведіть приклади використання з'єднань деталей з натягом.
9. Вкажіть переваги паяних з'єднань та де вони використовуються?
10. Поясніть механізм утворення клейового з'єднання.

Література

основна

1. Кінницький Я. Т. Теорія механізмів і машин : підручник. К.: Наукова думка, 2002. 660 с.
2. Коновалюк Д. М., Ковальчук Р. М. Деталі машин : підручник 2-ге вид. К. : Кондор, 2004. 584 с.
3. Павловський М. А. Технічна механіка : підручник. К. : Техніка, 2002. 510 с.
4. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів : підручник 2-ге вид., допов. і перероб. / За ред. Г. С. Писаренка. К. : Вища школа, 2004. 655с.
5. Технічна механіка : підручник / І. Є. Кравченко та ін. Київ : «Хай-Тек Прес», 2011. 340 с.

додаткова

6. Антоненко І. І., Перга С. М. Технічна механіка : навч. посіб. Кривий Ріг : КДПУ, 2016. 91 с.
7. Бучинський М. Я., Горик О. В., Чернявський А. М., Яхін С. В. Основи творення машин / За ред. О. В. Горика. Харків : Вид-во «НТМТ», 2017. 448 с.
8. Деталі машин : підручник / Міняйло А. В., та ін. Київ : Агроосвіта , 2013. 448 с.
9. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів : підручник . Львів: Магнолія, 2007. 170 с.
10. Короткий довідник з теоретичної механіки : навч. посіб. / І. П. Смерека та ін. Львів : "Інтелект-Захід", 2001. 239 с.
11. Малащенко В. О., Янків В. В. Деталі машин. Курсове проектування: навч. посіб. 3-тє видання, стереотипне. Львів : Новий світ-2000, 2006. 252 с.
12. Павлице В. Т. Основи конструювання та розрахунок деталей машин : підручник. Львів : Афіша, 2003. 560с.
13. Рудь Ю. С. Основи конструювання машин : підручник 2-ге вид., перероб. Кривий Ріг : Видавець ФО-П Чернявський Д. О., 2015. 492 с.
14. Теоретична механіка : посіб. до практ. занять / В М. Булгаков та ін. ; за ред. С. І. Кучеренка. Ніжин: «Міланік», 2009. 639 с.
15. Теорія механізмів і машин : короткий довідник для студентів інженерно-технічних спеціальностей, вид. 3-тє, випр. і доп / Я. Т. Кіницький. Хмельницький : ХНУ, 2013. 59 с.
16. Федуліна А. І. Теоретична механіка : навч. посіб. Київ : Вища школа, 2005. 318 с.
17. Цасюк В. В. Теоретична механіка : навч. посіб. Київ : ЦУЛ, 2004. 402 с.



ДОДАТКИ

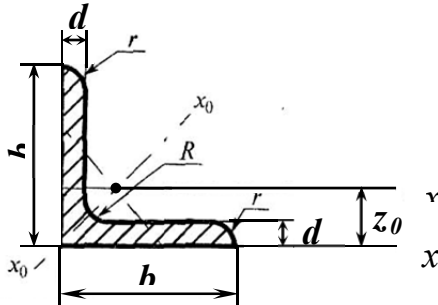
Додаток А

Розміри сталюого прокату

Кутники сталеві гарячекатані рівнополичні

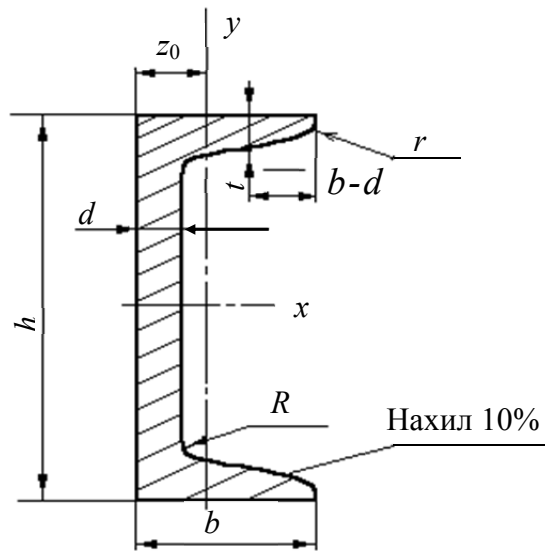
ДСТУ 2251:2018

Позначення:

 b — ширина полки; d — товщина полки; J — момент інерції; i — радіус інерції; W — момент опору; z_0 — відстань від центру ваги до зовнішньої грани полки; A — площа кутника.

Номер кутника	Розміри		Площа перерізу A	Довідкові величини для осей								
	b	d		$x - x$			$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			z_0
	мм	мм	J_x	W_x	i_x	J_{x_0}	i_{x_0}	J_{y_0}	W_{y_0}	i_{y_0}		
			см ²	см ⁴	см ⁴	см	см ⁴	см ⁴	см ⁴	см ³	см	см
2,5	25	3	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,76
3,0	30	3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,37	0,80	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	0,89
3,2	32	3	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	0,97
		4	2,17	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	1,05
4,0	40	3	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	1,17
4,5	45	3	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	1,30
5,0	50	3	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	1,52
		5	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	1,57
6,0	60	4	4,72	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	1,62
		5	5,83	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	1,66
		6	6,92	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	1,70
		8	9,40	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	1,78
		10	11,08	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15,00	5,70	1,16	1,85
6,3	63	4	4,69	18,86	4,09	1,95	29,00	2,45	7,81	3,26	1,25	1,69
		5	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	1,74
		6	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	1,78

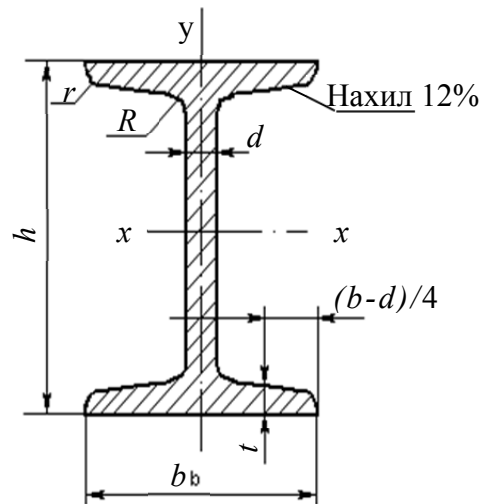
Швелери сталеві гарячекатані ДСТУ 3436–96



Номер балки	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу A	Довідкові величини для осей				
								$x-x$		$y-y$		z_0
								J_x	W_x	J_y	W_y	
								мм				
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	12,8	4,75	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	20,4	6,46	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	304	50,6	31,2	8,52	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	491	70,2	45,4	11,0	1,67
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	547	93,4	63,3	13,8	1,80
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	1090	121	86,0	17,0	1,94
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	113	20,5	2,07
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	2110	192	151	25,1	2,21
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	208	31,6	2,42
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	4160	308	262	37,3	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	5810	387	327	43,6	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	7980	484	410	51,8	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14	6,0	53,4	10820	601	513	61,7	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	15220	761	642	73,4	2,75



Двотаври сталеві гарячекатані ДСТУ 8768:2018



Номер балки	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу, А	Довідкові величини для осей				
								$x-x$			$y-y$	
								J_x ,	W_x ,	S_x	J_y ,	W_y ,
								см ⁴	см ³	см ³	см ⁴	см ³
мм							см ²	см ⁴	см ³	см ³	см ⁴	см ³
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	58,6	58,6	14,5
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143	81,6	82,6	18,4
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184	104	115	23,1
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	131	157	28,6
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	163	198	34,5
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	210	260	41,5
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	268	337	49,9
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	423	516	71,1
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	19062	953	545	667	86,1
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	27696	1231	708	808	101
50	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	76806	2560	919	1725	182

Значення e, X, Y для радіальних та радіально-упорних вальниць

α	e	Вальниці однорядні		Вальниці двохрядні			
		$\frac{F_a}{V \cdot F_r} > e$		$\frac{F_a}{V \cdot F_r} \leq e$		$\frac{F_a}{V \cdot F_r} > e$	
		X	Y	X	Y	X	Y
0^0	$0,28 \cdot \left(\frac{F_a}{z \cdot D_w^2 \cdot \cos \alpha} \right)^{0,23}$	0,56	0,44/e	1,0	0	0,56	0,44/e
12^0	$0,41 \cdot \left(\frac{F_a}{z \cdot D_w^2 \cdot \cos \alpha} \right)^{0,17}$	0,45	0,55/e	1,0	0,62/e	0,74	0,88/e
15^0	$0,46 \cdot \left(\frac{F_a}{z \cdot D_w^2 \cdot \cos \alpha} \right)^{0,11}$	0,44	0,56/e	1,0	0,63/e	0,72	0,91/e
18^0	0,57	0,43	1,0	1,0	1,09	0,70	1,63
25^0	0,68	0,41	0,87	1,0	0,92	0,67	1,41
26^0	0,68	0,41	0,87	1,0	0,92	0,67	1,41
36^0	0,95	0,37	0,66	1,0	0,66	0,60	1,07
40^0	1,14	0,35	0,57	1,0	0,55	0,57	0,93

Примітка: 1. Для однорядних вальниць при $\frac{F_a}{V \cdot F_r} \leq e$ $X=1, Y=0$.

2. α - кут контакту тіл кочення з поверхнею кілець.

3. D_w - діаметр кульок (мм), z - кількість кульок в одному ряду.



ЗМІСТ

ВСТУП	3
МОДУЛЬ 1. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ	4
1.1. Статика	4
1.1.1. Основні визначення і поняття	4
1.1.1. Умови рівноваги систем збіжних сил.	9
1.1.2. Умови рівноваги плоских систем сил.	12
1.1.3. Статична рівновага твердого тіла.....	18
1.1.4. Рівновага тіл з урахуванням сили тертя.....	22
1.2. Кінематика	24
1.2.1. Кінематичні рівняння руху.....	24
1.2.2. Складний рух точки.....	32
1.3. Динаміка	37
1.3.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки... ..	38
1.3.2. Принцип Даламбера для матеріальної точки і для твердого тіла.....	43
1.3.3. Основний закон динаміки обертального руху.....	45
1.3.5. Динаміка системи матеріальних точок.....	51
1.3.4. Рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла.....	53
1.3.6. Закон збереження кількості руху системи.	54
1.3.7. Робота сил.....	57
1.3.8. Закон збереження механічної енергії.....	63
МОДУЛЬ 2. ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА	70
2.1. Опір матеріалів	70
2.1.1. Внутрішні силові фактори.....	71
2.1.2. Деформація розтягу (стиску).....	75
2.1.3. Механічні характеристики міцності.....	79
2.1.4. Чистий зсув. Закон Гука при зсуві.....	86
2.1.5. Деформація кручення.....	88
2.1.6. Згин. Нормальні та дотичні напруження при згині.....	92
2.1.7. Складні види деформацій.....	106
2.2. Деталі машин	114
2.2.1. Механізми перетворення руху.....	118
2.2.2. Механічні передачі. Загальні положення.....	125
2.2.3. Фрикційні передачі.....	127
2.2.4. Пасові передачі.....	129

2.2.5. Зубчаті передачі.....	134
2.2.6. Черв'ячні передачі.....	143
2.2.7. Редуктори.....	149
2.2.8. Ланцюгові передачі.....	154
2.2.9. Вали та осі.....	160
2.2.10. Опори валів.....	163
2.2.11. Муфти.....	172
2.2.12. Роз'ємні з'єднання деталей машин.....	181
2.2.13. Нероз'ємні з'єднання деталей машин.....	187
ЛІТЕРАТУРА.....	196
ДОДАТКИ.....	197

Калязін Ю.В.

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчально-методичний посібник
до самостійної роботи

Технічний редактор – А. І. Тимощук

Коректура – авторська

Здано до друку 23.09.2021 р.
Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman.
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Ум.-друк. арк. 11,86.
Наклад 200 прим. Зам. № 2021-51.

Видавництво ПП «Астроя»,
вул. Шведська 20, кв. 4, м. Полтава, 36014
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 5599 від 19.09.2017 р.