Міністерство освіти і науки України
Полтавський національний педагогічний університет
імені В. Г. Короленка

Ю. Д. Москаленко, О. В. Коваленко, Л. П. Черкаська

АЛГЕБРА І ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Полтава – 2021

УДК 512+511(075.8)
М 82

Рецензенти:

Л. О. Флегантов, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії;

Т. М. Барболіна, доктор фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка

Затверджено та рекомендовано до друку вченою радою Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка. Протокол №1 від 30 серпня 2021 року

Москаленко Ю. Д., Коваленко О. В., Черкаська Л. П.

М82 Алгебра і теорія чисел : метод. рек. до проведення практ. занять та організації самостійної роботи студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2021. 96 с.

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та організації самостійної роботи з дисципліни “Алгебра і теорія чисел” є системою методично-дидактичних матеріалів, які розкривають різні аспекти алгебраїчної підготовки студентів. Структура і зміст рекомендацій дозволяють індивідуалізувати навчання студентів, реалізувати ефективні підходи до вивчення дисципліни, належно організувати самостійну роботу майбутніх учителів математики.

Для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика).

ПЕРЕДМОВА

Пропоновані методичні рекомендації до проведення практичних занять та організації самостійної роботи написані відповідно до робочої навчальної програми дисципліни “Алгебра і теорія чисел”.

Мета вивчення дисципліни:

✓ оволодіння студентами ґрунтовною математичною підготовкою з класичної теорії чисел і теорії многочленів;

✓ формування загальнонаукового світогляду і виховання алгебраїчної та теоретико-числової культури, необхідної майбутньому вчителю, а також для проведення наукових досліджень.

Посібник містить 6 параграфів відповідно до змістових модулів робочої навчальної програми дисципліни, яку опановують студенти другого курсу предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) в Полтавському національному педагогічному університеті імені В. Г. Короленка. Кожний параграф складається із тематичних підпунктів, що містять приклади розв’язань типових задач та вправи для самостійної роботи.

Перед тим, як користуватися посібником, студент має опрацювати відповідний теоретичний матеріал (див. список рекомендованої літератури).

Вивчаючи курс алгебри і теорії чисел, студенти мають виконати протягом кожного семестру дві контрольні роботи та одне індивідуальне навчально-дослідне завдання. Наведені приклади розв’язань задач і розв’язування студентами завдань для самостійної роботи сприяють формуванню необхідних знань та вмінь для успішного проходження поточного і підсумкового контролю.

§ 1. ГРУПИ

1.1. Групи. Підгрупи груп

Приклади розв'язань задач

Задача № 1. Чи є абелевою групою відносно операції додавання множина чисел $M = \left\{ a + b\sqrt{7} \,\middle|\, a, b \in Z \right\}$?

Розв'язання.

Перевіримо замкненість множини *M* відносно операції додавання. Нехай $m_1 = a_1 + b_1\sqrt{7}$, $m_2 = a_2 + b_2\sqrt{7}$ – два довільні елементи множини *M*. Тоді $m_1 + m_2 = \left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right)\sqrt{7}$, де $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in Z$. Звідки $m_1 + m_2 \in M$, а це означає замкненість множини *M* відносно операції додавання.

Перевіримо аксіоми абелевої групи:

1) Нехай $m_1 = a_1 + b_1\sqrt{7}$, $m_2 = a_2 + b_2\sqrt{7}$, $m_3 = a_3 + b_3\sqrt{7}$ – довільні елементи множини *M*. Скориставшись асоціативністю операції додавання цілих чисел, одержуємо асоціативність додавання елементів множини *M*:

$$\left(m_1 + m_2\right) + m_3 = \left(\left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right)\sqrt{7}\right) + \left(a_3 + b_3\sqrt{7}\right) =$$

$$= \left(a_1 + a_2\right) + a_3 + \left(\left(b_1 + b_2\right) + b_3\right)\sqrt{7} = a_1 + \left(a_2 + a_3\right) + \left(b_1 + \left(b_2 + b_3\right)\right)\sqrt{7} =$$

$$= a_1 + b_1\sqrt{7} + \left(\left(a_2 + a_3\right) + \left(b_2 + b_3\right)\sqrt{7}\right) = m_1 + (m_2 + m_3).$$

2) Із рівностей

$$m_1 + m_2 = a_1 + a_2 + \left(b_1 + b_2\right)\sqrt{7} = a_2 + a_1 + \left(b_2 + b_1\right)\sqrt{7} = m_2 + m_1$$

одержуємо комутативність додавання елементів множини *M* на основі комутативності додавання на множині *Z*.

3) Елемент $0 = 0 + 0\sqrt{7} \in M$, тому M містить нульовий елемент.

4) Протилежним до елемента $m = a + b\sqrt{7} \in M$ буде – $(-m) = (-a) + (-b)\sqrt{7} \in M$, оскільки $m + (-m) = 0 + 0\sqrt{7}$.

Отже, кожний елемент множини M у цій множині має протилежний.

За означенням M – адитивна абелева група.

Задача № 2. Чи утворює мультиплікативну групу множина кососиметричних дійсних квадратних матриць порядку 2

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\},$$

визначник яких не дорівнює нулю?

Розв'язання.

З'ясуємо, чи є операція множення бінарною алгебраїчною операцією на множині M. Візьмемо два довільні елементи з цієї множини:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

де $|A_1| \neq 0, |A_2| \neq 0.$

За правилами множення матриць одержуємо

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -b_1 a_2 - a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M,$$

де $a = a_1 a_2 - b_1 b_2, \ b = a_1 b_2 + a_2 b_1 \in R, \ |A_1 A_2| = |A_1||A_2| \neq 0.$

Отже, множина M – замкнена відносно операції множення матриць, а сама операція множення є бінарною алгебраїчною операцією на множині M.

Перевіримо аксіоми мультиплікативної групи:

1) Операція множення асоціативна на множині дійсних квадратних матриць порядку n. Тому вона буде також асоціативною і на множині M.

2) Матриця $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M$, тому M – містить одиничний елемент.

3) З'ясуємо, чи до кожного елемента $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in M$ у цій множині існує обернений елемент. Нехай $B=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\in M$ – обернений до A. Тоді має місце матричне рівняння $AB=E$ або

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Це рівняння рівносильне такій системі лінійних алгебраїчних рівнянь від двох змінних:

$$\begin{cases}ax-by=1,\\ bx+ay=0.\end{cases}$$

Одержана система має єдиний розв'язок $x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$, $y=-\dfrac{b}{a^2+b^2}$, оскільки $|A|=a^2+b^2\neq 0$.

Отже, елемент $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, де $a^2+b^2\neq 0$ – оборотний у множині

M і має обернений $B = A^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$

Задача № 3. Знайти всі підгрупи мультиплікативної циклічної групи п'ятнадцятого порядку.

Розв'язання.

Нехай $G = \langle a \rangle$, $a^{15} = 1$, H – деяка підгрупа групи G, $|H|$ – її порядок. Тоді за теоремою Лагранжа порядок підгрупи H є натуральним дільником числа 15, тобто $|H| \in \{1,3,5,15\}$.

Нехай $|H| = 1$. Оскільки будь-яка підгрупа повинна містити одиничний елемент, то $H = \langle 1 \rangle$ – єдина підгрупа першого порядку.

Нехай $|H| = 15$. Очевидно, $H = G = \langle a \rangle$.

Нехай $|H| = 3$. Відомо, що будь-яка підгрупа циклічної групи є циклічною, отже, $H = \langle a^k \rangle$, $\left(a^k\right)^3 = 1$, де $1 < k < 15$. Оскільки $a^{3k} = 1$, то $3k \vdots 15$, звідки $k \vdots 5$.

Отже, маємо два випадки:

1. $k = 5$; $H = \langle a^5 \rangle$; $\left(a^5\right)^2 = a^{10}, \left(a^5\right)^3 = a^{15} = 1$, звідки $H = \left\{1, a^5, a^{10}\right\}$.

2. $k = 10$; $H = \langle a^{10} \rangle$; $\left(a^{10}\right)^2 = a^{20} = a^{15} \cdot a^5 = 1 \cdot a^5 = a^5, \left(a^{10}\right)^3 = a^{30} =$

$= \left(a^{15}\right)^2 = 1$, звідки $H = \left\{1, a^5, a^{10}\right\}$.

Отже, група G містить єдину підгрупу третього порядку: $H = \left\{1, a^5, a^{10}\right\}$.

Якщо $|H| = 5$, то $H = \langle a^k \rangle$, $\left(a^k\right)^5 = 1$, де $1 < k < 15$. Оскільки $a^{5k} = 1$, то $5k \vdots 15$, звідки $k \vdots 3$.

У випадках $k=3,\ k=6,\ k=9,\ k=12$, міркуючи аналогічно до попереднього, одержимо, що $H=\left\{1,a^3,a^6,a^9,a^{12}\right\}$.

Відповідь: група G містить такі підгрупи: $H_1=\left\{1\right\}$, $H_2=\left\{1,a^5,a^{10}\right\}$, $H_3=\left\{1,a^3,a^6,a^9,a^{12}\right\}$, $H_4=G$.

Завдання для самостійної роботи

1.1.1. Чи утворює абелеву групу з операцією додавання множина $mZ=\left\{mk\,\middle|\,k\in Z\right\}$?

1.1.2. Чи є абелевою групою відносно операції додавання множина чисел $M=\left\{a+b\sqrt{5}\,\middle|\,a,b\in Q\right\}$?

1.1.3. Чи є абелевою групою відносно операції множення множина чисел $M=\left\{2^k\,\middle|\,k\in R\right\}$?

1.1.4. Чи утворює мультиплікативну групу множина невироджених діагональних дійсних квадратних матриць порядку 3

$$M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\middle|\,abc\neq 0\wedge a,b,c\in R\right\}?$$

1.1.5. Чи утворює мультиплікативну групу множина комплексних квадратних матриць порядку 3

$$M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&c&d\end{pmatrix}\middle|\,a,b,c,d\in C\right\},$$

визначник яких не дорівнює нулю?

1.1.6. Знайти всі підгрупи мультиплікативної циклічної групи восьмого порядку.

1.1.7. Знайти всі підгрупи мультиплікативної циклічної групи шістнадцятого порядку.

1.1.8. Знайти всі підгрупи мультиплікативної циклічної групи вісімнадцятого порядку.

1.1.9. Знайти всі підгрупи мультиплікативної циклічної групи двадцятого порядку.

1.1.10. Знайти всі підгрупи мультиплікативної циклічної групи двадцять першого порядку.

1.2. Розклад групи за підгрупою. Нормальні дільники груп

Приклади розв'язань задач

Задача № 4. Знайти фактор-групу адитивної групи цілих чисел, кратних 5, за підгрупою цілих чисел, які поділяються на 15.

Розв'язання.

Нехай $G = \{5n \mid n \in Z\}$, $H = \{15n \mid n \in Z\}$. Для того, щоб знайти суміжні класи групи G за підгрупою H, потрібно визначити необхідні й достатні умови належності двох довільних елементів групи G одному суміжному класу.

Нехай $g \in G$, $g + H -$ суміжний клас групи G за підгрупою H і $g_1, g_2 \in G$. Оскільки будь-який елемент суміжного класу може бути його представником, то $g_1 \in (g + H)$ і $g_2 \in (g + H)$ тоді і лише тоді, коли $g_1 + H = g_2 + H$, що рівносильно умові $(g_1 - g_2) \in H$. Нехай $g_1 = 5m$; $g_2 = 5k$; $\big((g_1 - g_2) \in H\big) \Leftrightarrow \big((g_1 - g_2) \vdots 15\big) \Leftrightarrow \big((5m - 5k) \vdots 15\big) \Leftrightarrow$

$(m-k)\vdots 3$. Відомо, що різниця двох цілих чисел поділяється на довільне ціле ненульове число l тоді і лише тоді, коли ці числа при діленні на l дають однакові остачі. Існують при діленні на число 3 три остачі: 0, 1 і 2; отже, існують три різні суміжні класи групи G за підгрупою H:

$$0+H=H=\{\ldots,-45,-30,-15,\ 0,15,30,45,\ \ldots\};$$

$$5+H=\{\ldots,-40,-25,-10,\ 5,20,35,50,\ \ldots\};$$

$$10+H=\{\ldots,-35,-20,-5,\ 10,25,40,55,\ \ldots\}.$$

Відповідь: $G/H=\{H,\ 5+H,\ 10+H\}$.

Завдання для самостійної роботи

1.2.1. Знайти суміжні класи адитивної групи цілих чисел за підгрупою цілих чисел, кратних п’яти.

1.2.2. Знайти суміжні класи мультиплікативної групи ненульових комплексних чисел за підгрупою всіх додатних дійсних чисел.

1.2.3. Знайти розклади циклічної групи шостого порядку за всіма її підгрупами.

1.2.4. Знайти фактор-групу адитивної групи цілих чисел за підгрупою цілих чисел, які поділяються на 5.

1.2.5. Знайти фактор-групу адитивної групи цілих чисел, кратних 4, за підгрупою цілих чисел, які поділяються на 16.

1.2.6. Знайти фактор-групу адитивної групи комплексних чисел C за підгрупою дійсних чисел R.

1.2.7. Знайти фактор-групу групи коренів четвертого степеня з одиниці за її підгрупою $\{-1; 1\}$.

1.2.8. Знайти фактор-групу мультиплікативної групи ненульових дійсних чисел за підгрупою додатних дійсних чисел.

1.2.9. Знайти фактор-групу групи підстановок степеня n за підгрупою парних підстановок степеня n.

1.2.10. Знайти фактор-групу мультиплікативної групи невироджених квадратних матриць порядку n із раціональними елементами за підгрупою матриць із визначником, рівним одиниці.

1.3. Гомоморфізм груп

Приклади розв'язань задач

Задача № 5. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи шостого порядку в мультиплікативну циклічну групу четвертого порядку.

Розв'язання.

Нехай $G_1 = \langle a \rangle,\ a^6 = 1_a,\ \ G_2 = \langle b \rangle,\ b^4 = 1_b,\ \varphi$– гомоморфізм групи G_1 в групу G_2. Покажемо, що гомоморфізм φ повністю визначається образом твірного елемента групи G_1. Дійсно, якщо $\varphi(a) = b^k$, то для будь-якого елемента a^t групи G_1:

$$\varphi(a^t) = \varphi(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{t}) = \underbrace{\varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi(a)}_{t} = \left(\varphi(a)\right)^t = \left(b^k\right)^t.$$

Нехай $\varphi(a) = b^k$. Тоді з умови $\varphi(1_a) = \varphi(a^6) = b^{6k} = 1_b$ дістанемо $6k \vdots 4$, що рівносильно $k = 2$ або $k = 4$. Отже, образами твірного елемента групи G_1 можуть бути лише b^2 та $b^4 = 1_b$.

Існує два гомоморфізми групи G_1 у групу G_2.

1. $\varphi(a) = b^2$; тоді $\varphi(a^2) = (b^2)^2 = b^4 = 1_b$; $\varphi(a^3) = (b^2)^3 = b^6 = b^4 \cdot b^2 = b^2$; $\varphi(a^4) = b^8 = 1_b$; $\varphi(a^5) = b^{10} = b^2$; $\varphi(1_a) = 1_b$.

Отже, гомоморфним образом групи G_1 в цьому випадку є підгрупа $f(G_1)$ групи G_2 другого порядку $f(G_1) = \{1_b, b^2\}$.

2. $\varphi(a) = 1_b$; при такому відображенні для довільного елемента a^l групи G_1: $\varphi(a^l) = (1_b)^l = 1_b$. Гомоморфним образом групи G_1 в цьому випадку є підгрупа $f(G_1) = \{1_b\}$ групи G_2, яка складається з одного одиничного елемента цієї групи.

Завдання для самостійної роботи

1.3.1. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи третього порядку в мультиплікативну циклічну групу дванадцятого порядку.

1.3.2. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи четвертого порядку в мультиплікативну циклічну групу шостого порядку.

1.3.3. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи четвертого порядку в мультиплікативну циклічну групу восьмого порядку.

1.3.4. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи п’ятого порядку в себе.

1.3.5. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи шостого порядку в себе.

1.3.6. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи шостого порядку в мультиплікативну циклічну групу п’ятнадцятого порядку.

1.3.7. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи десятого порядку в мультиплікативну циклічну групу чотирнадцятого порядку.

1.3.8. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи чотирнадцятого порядку в мультиплікативну циклічну групу шостого порядку.

1.3.9. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи п’ятнадцятого порядку в мультиплікативну циклічну групу п’ятого порядку.

1.3.10. Знайти всі гомоморфізми мультиплікативної циклічної групи вісімнадцятого порядку в мультиплікативну циклічну групу дванадцятого порядку.

§ 2. ТЕОРІЯ ПОДІЛЬНОСТІ В КІЛЬЦІ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

2.1. Подільність у кільці цілих чисел

Приклади розв'язань задач

Задача № 6. Методом математичної індукції довести, що при довільних натуральних значеннях n число $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$ поділяється на 11.

Розв'язання.

1. Перевіримо істинність даного твердження при $n=1$.

$6^{2}+3^{3}+3=66=11\cdot 6.$

Отже, при $n=1$ дане твердження істинне.

2. Припустимо, що дане твердження істинне при $n=k$, тобто що $6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}$ поділяється на 11.

3. Використовуючи припущення істинності даного твердження при $n=k$, доведемо його істинність при $n=k+1$, тобто, що $6^{2(k+1)}+3^{(k+1)+2}+3^{k+1}$ поділяється на 11.

$$6^{2k+2}+3^{(k+1)+2}+3^{k+1}=6^{2k+2}+3^{(k+2)+1}+3^{k+1}=36\cdot 6^{2k}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k}=$$
$$=3(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})+33\cdot 6^{2k}.$$

Оскільки кожний доданок виразу $3(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})+33\cdot 6^{2k}$ поділяється на 11, то і їх сума також поділяється на 11.

Індукція завершена, твердження доведено.

Задача № 7. Довести, що при будь-якому цілому непарному n число $a=n^{4}+7(7+2n^{2})$ поділяється на 64.

Розв'язання.

$a=n^{4}+7(7+2n^{2})=n^{4}+2\cdot 7n^{2}+7^{2}=(n^{2}+7)^{2}$; a поділяється на 64 тоді і лише тоді, коли n^2+7 поділяється на 8; $n^2+7=(n^2-1)+8=(n-1)(n+1)+8$; число $(n-1)(n+1)$ поділяється на 8, як добуток послідовних парних чисел; отже, n^2-7 поділяється на 8, як сума двох доданків, кожен з яких поділяється на 8.

Задача № 8. Довести, що число $n^2+5n+16$ не поділяється на 169 при жодному цілому *n*.

Розв'язання.

Припустимо супротивне: нехай $m=n^2+5n+16$ поділяється на 169. Подамо дане число у вигляді $m=(n-4)^2+13(n-4)+13\cdot 4$.

Якщо m поділяється на $169=13\cdot 13$, то m поділяється також на просте число 13. Оскільки $13(n-4)+13\cdot 4$ поділяється на 13, то $(n-4)^2$ за властивістю подільності поділяється на просте число 13, звідки $n-4$ поділяється на 13, а $(n-4)^2$ і $13(n-4)$ – на 169. Тоді $13\cdot 4=m-(n-4)^2-13(n-4)$ поділяється на 169, а це неможливо.

Задача № 9. Знайти всі такі цілі числа n, при яких число $\dfrac{19n+7}{7n+1}$ – ціле.

Розв'язання.

За умовою $19n+7$ повинно поділятися на $7n+1$ при шуканих n, тому із рівності $7(19n+7)-19(7n+1)=30$ можна зробити висновок, що $7n+1$ – дільник числа 30.

Серед чисел $\{7n+1 \mid n\in Z\}$ дільниками числа 30 є: 1, –6, 15.

Отже, маємо:

1) $7n+1=1, n=0; \dfrac{19\cdot 0+7}{7\cdot 0+1}=\dfrac{7}{1}=7\in Z;$

2) $7n+1=-6,\ n=-1;\ \dfrac{19\cdot(-1)+7}{7\cdot(-1)+1}=\dfrac{-12}{-6}=2\in Z;$

3) $7n+1=15,\ n=2;\ \dfrac{19\cdot 2+7}{7\cdot 2+1}=\dfrac{45}{15}=3\in Z.$

Відповідь: 0, –1, 2.

Задача № 10. Довести, що коли m не поділяється на n, то і a^m-1 не поділяється на a^n-1, де a, m, n – довільні натуральні числа, $a\neq 1$.

Розв'язання.

Припустимо супротивне: нехай існують натуральні числа a, m, n такі, що m не поділяється на n і a^m-1 поділяється на a^n-1. Поділимо m на n з остачею: $m=nq+r$, де $0<r<n$ (оскільки m не поділяється на n, то $r\neq 0$). Якщо a^m-1 поділяється на a^n-1, то і $(a^m-1)-(a^n-1)$ поділяється на a^n-1, звідки випливає, що $a^n(a^{m-n}-1)$ поділяється на a^n-1. Але числа a^n і a^n-1 взаємно прості, тому $a^{m-n}-1$ поділяється на a^n-1, а, значить, і $(a^{m-n}-1)-(a^n-1)$, тобто $a^n(a^{m-2n}-1)$ поділяється на a^n-1. Отже, ми одержали, що $a^{m-2n}-1$ поділяється на a^n-1. Продовжуючи цей процес, через q кроків одержимо, що a^r-1 поділяється на a^n-1, а це неможливо, оскільки $a^r-1<a^n-1$.

Задача № 11. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 826 і 938.

Розв'язання.

За допомогою алгоритму Евкліда знайдемо найбільший спільний дільник чисел 826 і 938.

$$\begin{array}{r|l} -938 & \underline{826} \\ \underline{826} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -826 & \underline{112} \\ \underline{784} & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -112 & \underline{42} \\ \underline{84} & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -42 & \underline{28} \\ \underline{28} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -28 & \underline{14} \\ \underline{28} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $(826,\ 938) = 14$.

Для знаходження найменшого спільного кратного даних чисел використаємо формулу

$$[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}.$$

$$[826,\ 938] = \frac{826 \cdot 938}{14} = 826 \cdot 67 = 55342.$$

Відповідь: $(826,\ 938) = 14,\ [826,\ 938] = 55342.$

Задача № 12. Знайти лінійне зображення найбільшого спільного дільника чисел $a = 6919$ і $b = 1443$.

Розв’язання.

Знайдемо найбільший спільний дільник даних чисел 6919 і 1443 за допомогою алгоритму Евкліда.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,6919 & 1443 \\ \cline{2-2}
\underline{5772} & 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1443 & 1147 = r_1 \\ \cline{2-2}
\underline{1147} & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1147 & 296 = r_2 \\ \cline{2-2}
\underline{888} & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,296 & 259 = r_3 \\ \cline{2-2}
\underline{259} & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,259 & 37 = r_4 = d \\ \cline{2-2}
\underline{259} & 7 \\
0 &
\end{array}
$$

Отже, $(6919, 1443) = d = 37$. Виконане ділення запишемо у вигляді рівностей:

$$a = 4b + r_1;\ b = r_1 + r_2;\ r_1 = 3r_2 + r_3;\ r_2 = r_3 + d.$$

Звідки

$$r_1 = a - 4b;\ r_2 = b - r_1;\ r_3 = r_1 - 3r_2;\ d = r_2 - r_3.$$

Рухаючись від останньої рівності до першої, одержимо:

$$d = r_2 - r_3 = r_2 - (r_1 - 3r_2) = -r_1 + 4r_2 = -r_1 + 4(b - r_1) = 4b - 5r_1 =$$

$$= 4b - 5(a - 4b) = -5a + 24b.$$

Відповідь: $37 = -5a + 24b.$

Завдання для самостійної роботи

2.1.1. Довести, що при довільних натуральних значеннях n число $3^{2n+2} - 8n - 9$ поділяється на 64.

2.1.2. Довести, що при довільних натуральних значеннях n число $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ поділяється на 19.

2.1.3. Довести, що число $n^2+7n+15$ не поділяється на 121 при жодному цілому n.

2.1.4. Довести, що число $n^2+11n-8$ не поділяється на 289 при жодному цілому n.

2.1.5. Знайти всі такі цілі числа n, при яких число $\frac{19n+7}{7n+11}$ – ціле.

2.1.6. Довести, що для будь-яких непарних чисел $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$, не кратних 3, число $a_1^2-a_2^2+ +a_3^2-a_4^2+ \ \ldots \ +a_{2n-1}^2-a_{2n}^2$ поділяється на 24.

2.1.7. Дано: $(a,b)=1$. Довести, що не існує числа d, більшого 2, на яке одночасно поділялися б числа $a+b$ і a^2+b^2.

2.1.8. Чи може квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ з цілими коефіцієнтами мати дискримінант, рівний 23?

2.1.9. Довести, що рівняння $ax+by=ab$, де a,b – взаємно прості натуральні числа, не має розв'язку в натуральних числах.

2.1.10. Довести, що рівняння $19x^2+28y^2=729$ не має розв'язку в цілих числах.

Знайти НСД і НСК чисел:

2.1.11. 737 і 803; 2.1.12. 854 і 406;

2.1.13. 710 і 790; 2.1.14. 671 і 781;

2.1.15. 689 і 767; 2.1.16. 564 і 804;

2.1.17. 518 і 602; 2.1.18. 649 і 803;

2.1.19. 611 і 871; 2.1.20. 602 і 742.

Знайти лінійне зображення НСД чисел a і b:

2.1.21. $a=731, \ b=391$; 2.1.22. $a=779, \ b=437$;

2.1.23. $a=738, \ b=522$; 2.1.24. $a=6253, \ b=1001$;

2.1.25. $a = 546,\ \ b = 231;$ 2.1.26. $a = 795,\ \ b = 345;$

2.1.27. $a = 848,\ \ b = 464;$ 2.1.28. $a = 938,\ \ b = 406;$

2.1.29. $a = 854,\ \ b = 406;$ 2.1.30. $a = 4543,\ \ b = 885.$

2.2. Прості числа. Числові функції

Приклади розв'язань задач

Задача № 13. Знайти всі значення простого числа p такі, щоб числа $4p^2+1$ і $6p^2+1$ також були простими.

Розв'язання.

Легко переконатись, що найменшим простим числом, яке задовольняє умову задачі, є число 5. Доведемо, що воно єдине. Якщо $p > 5$, то p не поділяється на 5, тому за теоремою про ділення з остачею $p = 5n \pm 1$ або $p = 5n \pm 2$. Нехай $p = 5n \pm 1$, тоді $4p^2+1 = 4(5n \pm 1)^2 + 1 = 100n^2 \pm 40n + 5 = 5(20n^2 \pm 8n + 1);$ оскільки $p > 5$, то $4p^2+1 > 5,$ тому $20n^2 \pm 8n + 1 > 1,$ отже, число $4p^2+1$ – складене.

Якщо $p = 5n \pm 2$, то $6p^2+1 = 6(5n \pm 2)^2 + 1 = 150n^2 \pm 120n + 25 =$ $= 5(30n^2 \pm 24n + 5);$ очевидно, що $30n^2 \pm 24n + 5 > 1,$ тому число $6p^2+1$ – складене.

Відповідь: $p = 5.$

Задача № 14. Знайти найменше натуральне n, для якого $\tau(n) = 6.$

Розв'язання.

Кількість натуральних дільників натурального числа n знаходиться за формулою

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1),$$

де $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад натурального числа n.

Оскільки $\tau(n) = 6$, а число 6 розкладається щонайбільше на два множники, які перевищують 1, то n не може мати більше двох різних простих дільників. Тому потрібно розглянути два випадки:

1) $n = p_1^{\alpha_1}$, де p_1 – просте число, а $\alpha_1 \in N$;

2) $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, де p_1, p_2 – різні прості числа ($p_1 < p_2$), $\alpha_1, \alpha_2 \in N$.

Якщо $n = p_1^{\alpha_1}$, то $\tau(n) = \alpha_1 + 1 = 6$, звідки $\alpha_1 = 5$. Серед чисел виду $n = p_1^5$ найменшим натуральним числом є $n = 2^5 = 32$.

Якщо $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, то $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 6$, звідки $\alpha_1 = 1$ і $\alpha_2 = 2$ або $\alpha_1 = 2$ і $\alpha_2 = 1$. Серед чисел виду $n = p_1 p_2^2$ найменшим натуральним числом буде $n = 2 \cdot 3^2 = 18$, а серед чисел виду $n = p_1^2 p_2$ – натуральне число $n = 2^2 \cdot 3 = 12$.

На завершення вибираємо найменше з трьох чисел: 32, 18, 12.

Відповідь: 12.

Завдання для самостійної роботи

2.2.1. Довести, що не існує простих чисел a, b, c і d таких, що $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abcd + 4$.

2.2.2. Довести, що жодне з простих чисел $p - 1$ і $p + 1$, де p – добуток перших n простих чисел $(n > 1)$, не є квадратом цілого числа.

2.5.3. Знайти число і суму всіх натуральних дільників числа 792.

2.5.4. Знайти всі натуральні дільники числа 250.

2.5.5. Знайти добуток всіх натуральних дільників числа 3072.

2.2.6. Знайти найменше натуральне n, для якого $\tau(n) = 15$.

2.2.7. Знайти найменше натуральне n, для якого $\tau(n) = 21$.

2.2.8. Знайти натуральне n, якщо n має лише два прості дільники, $\tau(n) = 12$ і $\sigma(n) = 1240$.

2.5.9. Знайти натуральне n, якщо n має лише два прості дільники, $\tau(n) = 12$ і $\sigma(n) = 465$.

2.5.10. Знайти натуральне n, якщо $n \vdots 15$ і $\tau(n) = 24$.

2.3. Ланцюгові дроби

Приклади розв'язань задач

Задача № 15. За допомогою розкладу в ланцюговий дріб скоротити дріб $\dfrac{930}{828}$.

Розв'язання.

За алгоритмом Евкліда одержуємо

$$
\begin{array}{r|l}
-\,930 & 828 \\
\underline{828} & 1 = q_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,828 & 102 \\
\underline{816} & 8 = q_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,102 & 12 \\
\underline{96} & 8 = q_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,12 & 6 \\
\underline{12} & 2 = q_3 \\
0 &
\end{array}
$$

Отже, $\dfrac{930}{828} = [1;8,8,2]$. Для обчислення підхідних дробів складаємо таблицю.

k	-1	0	1	2	3
q_k		1	8	8	2
P_k	1	1	9	73	155
Q_k	0	1	8	65	138

Звідки $\frac{P_3}{Q_3}=\frac{155}{138}$ – нескоротний дріб, рівний дробу $\frac{930}{828}$.

Відповідь: $\frac{155}{138}$.

Задача № 16. Застосовуючи ланцюгові дроби, розв'язати в цілих числах рівняння $8x-15y=23$.

Розв'язання.

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$8x+15(-y)=23.$$

Визначимо невідомі x та $-y$.

Розкладемо в ланцюговий дріб $\frac{8}{15}$ і знайдемо його підхідні дроби.

$$\begin{array}{r|l} -\,8 & 15 \\ \underline{0} & 0 = q_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,15 & 8 \\ \underline{8} & 1 = q_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,8 & 7 \\ \underline{7} & 1 = q_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,7 & 1 \\ \underline{7} & 7 = q_3 \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $\frac{8}{15}=[0;\ 1,\ 1,\ 7]$.

Для обчислення чисельників і знаменників підхідних дробів складемо таблицю.

k	-1	0	1	2	3
q_k		0	1	1	7
P_k	1	0	1	1	8
Q_k	0	1	1	2	15

Одержали, що $P_2 = 1,\ Q_2 = 2.$

За відомою формулою знаходимо $x = (-1)^2 23 \cdot 2 + 15t,$ $-y = (-1)^3 23 \cdot 1 - 8t,\ \mathrm{t} \in \mathrm{Z}.$ Звідки $x = 46 + 15t,\ \ y = 23 + 8t,$ де t – довільне ціле число.

Відповідь: $\begin{cases} x = 46 + 15t, \\ y = 23 + 8t, \ \ \mathrm{t} \in \mathrm{Z}. \end{cases}$

Задача № 17. Застосовуючи ланцюгові дроби, обчислити $\sqrt{7}$ із точністю до 0,001.

Розв’язання.

Щоб розкласти дійсне число в ланцюговий дріб, використаємо алгоритм Евкліда, послідовно виділяючи цілу частину.

Використовуючи алгоритм виділення цілої частини для числа $\sqrt{7}$, одержуємо:

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{a_1}, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{a_2},$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{7} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{a_3}, \qquad a_3 = \frac{\sqrt{7} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{a_4},$$

$$a_4 = \sqrt{7} + 2 = 4 + \frac{1}{a_5}, \qquad a_5 = \frac{\sqrt{7} + 2}{3} = a_1.$$

Оскільки $a_5 = a_1$, то $\sqrt{7} = [2;(1,1,1,4)]$.

За наближене значення $\sqrt{7}$ можна взяти один із підхідних дробів ланцюгового дробу $[2;(1,1,1,4)]$. Як відомо, похибка наближення підхідним дробом $\frac{P_k}{Q_k}$ не перевищує $\frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$.

Знайдемо k таке, щоб $\frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < 0{,}001$. Для цього скористаємося таблицею.

k	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	…
q		2	1	1	1	4	1	1	1	…
P_k	1	2	3	5	8	37	45	82	127	…
Q_k	0	1	1	2	3	14	17	31	48	…

Беремо $k = 7$, оскільки $\frac{1}{31 \cdot 48} < 0{,}001$, тоді $\sqrt{7} \approx \frac{82}{31} \approx 2{,}645$.

Відповідь: $\sqrt{7} \approx 2{,}645$.

Завдання для самостійної роботи

За допомогою розкладу в ланцюгові дроби скоротити дроби:

2.3.1. $\frac{3536}{2397}$; 2.3.2. $\frac{4921}{2401}$;

2.3.3. $\frac{312}{456}$; 2.3.4. $\frac{1089}{1935}$;

2.3.5. $\frac{1197}{969}$; 2.3.6. $\frac{1573}{3267}$;

2.3.7. $\frac{935}{595}$; 2.3.8. $\frac{1674}{2214}$;

2.3.9. $\frac{3263}{3133}$; 2.3.10. $\frac{874}{1081}$.

Застосовуючи ланцюгові дроби, розв'язати в цілих числах рівняння:

2.3.11. $23x + 17y = 12$; 2.3.12. $19x - 15y = 17$;

2.3.13. $31x + 12y = 14$; 2.3.14. $22x - 17y = 13$;

2.3.15. $37x + 10y = 21$; 2.3.16. $31x - 12y = 23$;

2.3.17. $41x + 9y = 14$; 2.3.18. $32x - 17y = 7$;

2.3.19. $47x + 8y = 27$; 2.3.20. $53x - 28y = 21$.

Застосовуючи ланцюгові дроби, обчислити з точністю до 0,001:

2.3.21. $\sqrt{15} - 2$; 2.3.22. $\sqrt{19} + 2$;

2.3.23. $\sqrt{10} + 1$; 2.3.24. $\sqrt{14} - 3$;

2.3.25. $\sqrt{23} + 2$; 2.3.26. $\sqrt{22} - 1$;

2.3.27. $\sqrt{6} + 2$; 2.3.28. $\sqrt{26} - 4$;

2.3.29. $\sqrt{21} + 1$; 2.3.30. $\sqrt{17} + 3$.

§ 3. ТЕОРІЯ КОНГРУЕНЦІЙ

3.1. Числові конгруенції

Приклади розв’язань задач

Задача № 18. Знайти:

а) остачу від ділення $97^{70}+103^{50}$ на 15;

б) остачу від ділення 202^{48} на 26;

в) дві останні цифри числа 2021^{2021}.

Розв’язання.

а) $97\equiv 7(\mathrm{mod}\,15)\Rightarrow 97^{70}\equiv 7^{70}(\mathrm{mod}\,15)$.

Оскільки $(7,\ 15)=1,$ то за теоремою Ейлера $7^{\varphi(15)}\equiv 1(\mathrm{mod})15$.

$$\varphi(15)=\varphi(3\cdot 5)=(3-1)(5-1)=8\Rightarrow 7^{8}\equiv 1(\mathrm{mod})15\Rightarrow 7^{70}\equiv 7^{8\cdot 8+6}\equiv$$
$$\equiv (7^{8})^{8}\cdot 7^{6}\equiv 1^{8}\cdot 7^{6}\equiv 7^{6}\equiv 49^{3}\equiv 4^{3}\equiv 16\cdot 4\equiv 1\cdot 4\equiv 4(\mathrm{mod}\,15).$$

Отже, $97^{70}\equiv 4(\mathrm{mod}\,15)$.

Аналогічно, $103^{50}\equiv 13^{50}\equiv 13^{8\cdot 6+2}\equiv (13^{8})^{6}\cdot 13^{2}\equiv 13^{2}\equiv (-2)^{2}\equiv$
$\equiv 4(\mathrm{mod}\,15)$.

Отже, $103^{50}\equiv 4(\mathrm{mod}\,15)$.

Додавши почленно одержані конгруенції, отримаємо

$$97^{70}+103^{50}\equiv 8(\mathrm{mod}\,15),$$

звідки остача від ділення $97^{70}+103^{50}$ на 15 дорівнює 8.

Відповідь: 8.

б) $202=26\cdot 8-6\Rightarrow 202\equiv -6(\mathrm{mod}\,26)\Rightarrow 202^{48}\equiv (-6)^{48}\equiv$
$\equiv 6^{48}(\mathrm{mod}\,26)$.

Оскільки число 202 не взаємно просте з числом 6, то в даному випадку теорему Ейлера використати не можна. Тому скористаємося властивостями числових конгруенцій:

$$202^{48} \equiv 6^{48} \equiv 2^{48} \cdot 3^{48} \equiv \left(2^8\right)^6 \cdot \left(3^3\right)^{16} \equiv 256^6 \cdot 27^{16} \equiv (10 \cdot 26 - 4)^6 (26+1)^{16} \equiv$$

$$\equiv (-4)^6 \cdot 1^{16} \equiv 4^6 \equiv 4^4 \cdot 4^2 \equiv 256 \cdot 16 \equiv (10 \cdot 26 - 4)16 \equiv (-4)16 \equiv -64 \equiv$$

$$\equiv 3 \cdot 26 - 64 \equiv 14 (\mathrm{mod}\, 26).$$

Отже, $202^{48} \equiv 14 (\mathrm{mod}\, 26)$, звідки остача від ділення 202^{48} на 26 дорівнює 14.

Відповідь: 14.

в) Нам потрібно знайти остачу від ділення 2021^{2021} на 100. Із цією метою використаємо той факт, що конгруентні числа за модулем 100 дають при діленні на 100 одну і ту саму остачу.

$$2021 = 20 \cdot 100 + 21 \Rightarrow 2021 \equiv 21 (\mathrm{mod}\, 100) \Rightarrow 2021^{2021} \equiv 21^{2021} (\mathrm{mod}\, 100).$$

Оскільки $(21,100) = 1$, то за теоремою Ейлера $21^{\varphi(100)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 100)$. Обчисливши $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = \ = 2 \cdot 20 = 40$, дістанемо $21^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 100)$.

Розділивши степінь 2021 на $\varphi(100) = 40$ з остачею, одержуємо $2021 = 40 \cdot 50 + 21$, звідки $2021^{2021} \equiv 21^{2021} \equiv 21^{40 \cdot 50 + 21} \equiv \left(21^{40}\right)^{50} \cdot 21^{21} \equiv$ $\equiv 1^{50} \cdot 21^{21} \equiv 21^{21} (\mathrm{mod}\, 100)$. Далі, скориставшись властивостями числових конгруенцій, маємо:

$$2021^{2021} \equiv 21^{21} \equiv 3^{21} \cdot 7^{21} \equiv \left(3^7\right)^3 \cdot \left(3^4\right)^5 \cdot 7 \equiv 2187^3 \cdot 2401^5 \cdot 7 \equiv$$

$$\equiv (21 \cdot 100 + 87)^3 (24 \cdot 100 + 1)^5 \cdot 7 \equiv 87^3 \cdot 1^5 \cdot 7 \equiv 87^2 \cdot 87 \cdot 7 \equiv 7569 \cdot 609 \equiv$$

$$\equiv (75 \cdot 100 + 69)(6 \cdot 100 + 9) \equiv 69 \cdot 9 \equiv 621 \equiv 6 \cdot 100 + 21 \equiv 21 (\mathrm{mod}\, 100).$$

Отже, $2021^{2021} \equiv 21 (\mathrm{mod}\,100)$, звідки шуканими двома останніми цифрами числа 2021^{2021} є цифри 2 і 1.

Відповідь: 2 і 1.

Завдання для самостійної роботи

Знайти остачу від ділення числа a на число b:

3.1.1. $a = 137^{96} + 314^{325}$, $b = 11$;

3.1.2. $a = 188^{223} + 302^{137}$, $b = 13$;

3.1.3. $a = 114^{211} + 277^{119}$, $b = 17$;

3.1.4. $a = 304^{95} + 116^{178}$, $b = 9$;

3.1.5. $a = 215^{78} + 83^{114}$, $b = 19$;

3.1.6. $a = 137^{96} + 314^{325}$, $b = 11$;

3.1.7. $a = 135^{78} + 201^{140}$, $b = 13$;

3.1.8. $a = 91^{115} + 329^{71}$, $b = 17$;

3.1.9. $a = 278^{323} + 115^{214}$, $b = 9$;

3.1.10. $a = 81^{95} + 324^{97}$, $b = 19$;

3.1.11. $a = 36^{101}$, $b = 22$;

3.1.12. $a = 18^{76}$, $b = 27$;

3.1.13. $a = 22^{81}$, $b = 14$;

3.1.14. $a = 33^{41}$, $b = 21$;

3.1.15. $a = 51^{61}$, $b = 24$;

3.1.16. $a = 102^{26}$, $b = 30$;

3.1.17. $a = 126^{101}$, $b = 45$;

3.1.18. $a = 39^{87}$, $b = 26$;

3.1.19. $a = 51^{89}$, $b = 34$;

3.1.20. $a = 68^{68}$, $b = 44$.

3.2. Алгебраїчні конгруенції

Приклади розв'язань задач

Задача № 19. За штучним способом розв'язати такі конгруенції:

а) $25x \equiv 136 (\mathrm{mod}\,31)$; б) $39x \equiv 237 (\mathrm{mod}\,51)$; в) $8x \equiv 74 (\mathrm{mod}\,36)$.

Розв'язання.

а) Знаходимо $(25,31) = 1$, звідси робимо висновок, що дана конгруенція має єдиний розв'язок.

Додамо до правої частини конгруенції ціле число $31k$, кратне модулю. Накладаємо на k умову: $\frac{136+31k}{25} \in Z$. Із рівності $\frac{136+31k}{25} = \frac{150+25k+2(3k-7)}{25}$ дістаємо $k=-6$.

Отже, додамо до правої частини конгруенції ціле число –186. Одержимо

$$25x \equiv -50 \pmod{31}.$$

Поділимо обидві частини конгруенції на 25:

$$x \equiv -2 \pmod{31}.$$

Це і є розв'язок даної конгруенції.

Відповідь: $-2 \pmod{31}$.

б) Оскільки $(31,51)=3$ і $237 \vdots 3$, то дана конгруенція має 3 розв'язки.

Скоротимо обидві частини конгруенції і модуль на їх спільний дільник число 3:

$$13x \equiv 79 \pmod{17}.$$

Додамо до правої частини конгруенції число 51, кратне модулю 17. Дістанемо

$$13x \equiv 130 \pmod{17}.$$

Розділивши обидві частини одержаної конгруенції на число 13, знаходимо розв'язок конгруенції за модулем 17:

$$x \equiv 10 \pmod{17}.$$

Цей розв'язок розбивається на три розв'язки даної конгруенції за модулем 51:

$$\left[\begin{array}{l} x \equiv 10 \pmod{51}, \\ x \equiv 10+17 \pmod{51}, \\ x \equiv 10+2\cdot 17 \pmod{51}, \end{array}\right.$$

або коротше

$$x \equiv 10;\, 27;\, 44 \pmod{51}.$$

Відповідь: 10; 27; 44 (mod51).

в) Оскільки $(8,36)=4$ і $74 \not\vdots\, 4$, то дана конгруенція несумісна.

Відповідь: $\varnothing$.

Задача № 20. Розв'язати конгруенцію за способом Ейлера

$$47x \equiv 10 \pmod{25}.$$

Розв'язання.

$$47x \equiv 10 \pmod{25} \Leftrightarrow 22x \equiv 10 \pmod{25} \Leftrightarrow 11x \equiv 5 \pmod{25}.$$

Визначимо кількість розв'язків даної конгруенції: $(11,25)=1;$ отже, дана конгруенція має єдиний розв'язок. Цей розв'язок знаходимо за формулою $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod{m}$.

У нашому випадку $a=11, b=5, \varphi(m)=\varphi(25)=\varphi\left(5^2\right)=5^2-5=20$.

Тоді $x \equiv 5\cdot 11^{19} \pmod{25}$. Число $5\cdot 11^{19}$ замінимо найменшим невід'ємним лишком за модулем 25. Одержуємо $5\cdot 11^{19} \equiv 5\cdot\left(11^2\right)^9\cdot 11 \equiv 55\cdot 121^9 \equiv$

$$\equiv (25\cdot 2+5)(25\cdot 5-4)^9 \equiv 5\cdot(-4)^9 \equiv 5\cdot(-4)\left((-4)^4\right)^2 \equiv -20\cdot 256^2 \equiv$$
$$\equiv (-25+5)(25\cdot 10+6)^2 \equiv 5\cdot 6^2 \equiv 180 \equiv 25\cdot 7+5 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Отже, $x \equiv 5 \pmod{25}$ – розв'язок даної конгруенції.

Відповідь: 5(mod 25).

Задача № 21. Застосовуючи ланцюгові дроби, розв'язати конгруенцію

$$375x \equiv 195 \pmod{501}.$$

Розв'язання.

Знайдемо ланцюговий дріб числа $\frac{501}{375}$. Для цього скористаємось алгоритмом Евкліда. Ділення виконуватимемо стовпчиком.

$$-\begin{array}{r|l} 501 & 375 \\ \underline{375} & 1 = q_0 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 375 & 126 \\ \underline{252} & 2 = q_1 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 126 & 123 \\ \underline{123} & 1 = q_2 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 123 & 3 = (501,375) \\ \underline{123} & 41 = q_3 \\ 0 & \end{array}$$

Оскільки $(501,375) = 3$ і $195 \vdots 3$, то дана конгруенція має три розв'язки.

Скоротимо обидві частини і модуль даної конгруенції на 3, одержимо допоміжну конгруенцію $125x \equiv 65 (\mathrm{mod}\, 167)$. Розв'яжемо її за допомогою ланцюгових дробів, скориставшись формулою $x \equiv (-1)^n P_{n-1} b (\mathrm{mod}\, m)$, де P_{n-1} – чисельник передостаннього підхідного дробу в розкладі $\frac{m}{a}$ в ланцюговий дріб, де m – модуль, a – коефіцієнт біля невідомого алгебраїчної конгруенції $ax \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$. У нашому випадку маємо:

$$\frac{m}{a} = \frac{167}{125} = [1;\, 2,\, 1,\, 41],\ n = 3.$$

Звідки

k	-1	0	1	2	3
q_k		1	2	1	41
P_k	1	1	3	4	167

Отже, $x \equiv (-1)^3 4 \cdot 65 \equiv -260 \equiv 74 (\mathrm{mod}\, 167)$ є розв'язком конгруенції $125x \equiv 65 (\mathrm{mod}\, 167)$. Тоді задана конгруенція має такі розв'язки:

$$\left[\begin{array}{l} x \equiv 74 (\mathrm{mod}\, 501), \\ x \equiv 241 (\mathrm{mod}\, 501), \\ x \equiv 408 (\mathrm{mod}\, 501), \end{array}\right.$$

або $x \equiv 74; 241; 408 (\mathrm{mod}\, 501)$.

Відповідь: $74; 241; 408 (\mathrm{mod}\, 501)$

Задача № 22. Розв'язати систему конгруенцій

$$\begin{cases} 2x \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 13), \\ 5x \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 17), \\ 3x \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 31). \end{cases}$$

Розв'язання.

Розв'яжемо першу конгруенцію системи.

$$2x \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 13) \Leftrightarrow 2x \equiv 20 (\mathrm{mod}\, 13) \Leftrightarrow x \equiv 10 (\mathrm{mod}\, 13).$$

Отже, $x = 10 + 13t,\ t \in Z.$

Підставимо знайдене значення x у другу конгруенцію заданої системи. Тоді

$$5(10 + 13t) \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 17) \Leftrightarrow 65t \equiv -42 (\mathrm{mod}\, 17) \Leftrightarrow -3t \equiv 9 (\mathrm{mod}\, 17) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t \equiv -3 (\mathrm{mod}\, 17).$$

Отже, $t = -3 + 17k,\ k \in Z$. Звідки $x = 10 + 13t = 10 + 13(-3 + 17k) =$ $= -29 + 221k, k \in Z$ – розв'язок перших двох конгруенцій системи.

Підставимо це значення x в останню конгруенцію заданої системи.

$$3(-29 + 221k) \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 31) \Leftrightarrow 12k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 31) \Leftrightarrow 12k \equiv -30 (\mathrm{mod}\, 31) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2k \equiv -5 (\mathrm{mod}\, 31) \Leftrightarrow 2k \equiv 26 (\mathrm{mod}\, 31) \Leftrightarrow k \equiv 13 (\mathrm{mod}\, 31).$$

Отже, $k = 13 + 31l,\ l \in Z.$

На завершення підставляємо знайдене k в розв'язок перших двох конгруенцій системи і знаходимо розв'язок заданої системи конгруенцій:

$$x = -29 + 221k = -29 + 221(13 + 31l) = 2844 + 6851l, l \in Z.$$

Отже, $x \equiv 2844 (\mathrm{mod}\, 6851)$ – розв'язок заданої системи.

Відповідь: $2844 (\mathrm{mod}\, 6851)$.

Задача № 23. Розв'язати в цілих числах невизначене рівняння

$$7x + 17y = 22.$$

Розв'язання.

Наслідком даного рівняння є така система конгруенцій:

$$\begin{cases} 7x \equiv 22 (\mathrm{mod}\, 17), \\ 17y \equiv 22 (\mathrm{mod}\, 7). \end{cases}$$

Розв'язками системи будуть

$$\begin{cases} x = 8 + 17k, \\ y = 5 + 7l, \quad k, l \in Z. \end{cases}$$

З'ясуємо залежність між k і l за умови, що (x, y) – розв'язок невизначеного рівняння. Із рівності $7(8 + 17k) + 17(5 + 7l) = 22$, одержуємо $l = -1 - k$. Тоді $x = 8 + 17k$, $y = 5 + 7(-1 - k) = -2 - 7k$, де $k \in Z$.

Отже, маємо загальний розв'язок даного рівняння

$$\begin{cases} x = 8 + 17k, \\ y = -2 - 7k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Відповідь: $(8 + 17k; -2 - 7k)$, $k \in Z$.

Завдання для самостійної роботи

За штучним способом розв'язати такі конгруенції:

3.2.1. $21x \equiv 53 \pmod{34}$;

3.2.2. $35x \equiv 142 \pmod{51}$;

3.2.3. $39x \equiv 236 \pmod{64}$;

3.2.4. $19x \equiv 61 \pmod{97}$;

3.2.5. $121x \equiv 36 \pmod{59}$;

3.2.6. $65x \equiv 104 \pmod{78}$;

3.2.7. $77x \equiv 517 \pmod{33}$;

3.2.8. $92x \equiv -8 \pmod{116}$;

3.2.9. $123x \equiv 219 \pmod{39}$;

3.2.10. $169x \equiv 38 \pmod{26}$.

За способом Ейлера розв'язати такі конгруенції:

3.2.11. $21x \equiv -18 \pmod{33}$;

3.2.12. $20x \equiv 80 \pmod{55}$;

3.2.13. $12x \equiv 24 \pmod{52}$;

3.2.14. $30x \equiv -15 \pmod{55}$;

3.2.15. $33x \equiv 15 \pmod{42}$;

3.2.16. $21x \equiv -18 \pmod{33}$;

3.2.17. $14x \equiv 8 \pmod{22}$;

3.2.18. $45x \equiv -70 \pmod{70}$;

3.2.19. $16x \equiv -52 \pmod{60}$;

3.2.20. $20x \equiv 10 \pmod{25}$.

Застосовуючи ланцюгові дроби розв'язати такі конгруенції:

3.2.21. $98x \equiv -124 \pmod{170}$;

3.2.22. $165x \equiv 156 \pmod{243}$;

3.2.23. $129x \equiv 117 \pmod{189}$;

3.2.24. $87x \equiv 219 \pmod{126}$;

3.2.25. $50x \equiv -198 \pmod{132}$;

3.2.26. $98x \equiv -124 \pmod{170}$;

3.2.27. $92x \equiv 128 \pmod{126}$;

3.2.28. $57x \equiv -12 \pmod{204}$;

3.2.29. $81x \equiv -258 \pmod{237}$;

3.2.30. $96x \equiv 123 \pmod{117}$.

Розв'язати системи конгруенцій:

3.2.31. $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{5}, \\ 15x \equiv 1 \pmod{8}, \\ 9x \equiv 3 \pmod{6}; \end{cases}$

3.2.32. $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{8}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{5}, \\ 8x \equiv 2 \pmod{6}; \end{cases}$

3.2.33. $\begin{cases} 7x \equiv 3 \pmod 8, \\ 3x \equiv 7 \pmod 4, \\ 12x \equiv 4 \pmod 7; \end{cases}$

3.2.34. $\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod 5, \\ 2x \equiv 6 \pmod 7, \\ 3x \equiv 1 \pmod 4; \end{cases}$

3.2.35. $\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 5, \\ 7x \equiv 4 \pmod 6, \\ 5x \equiv 4 \pmod 8; \end{cases}$

3.2.36. $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod 5; \\ 15x \equiv 1 \pmod 8; \\ 9x \equiv 3 \pmod 6; \end{cases}$

3.2.37. $\begin{cases} 17x \equiv 14 \pmod 5, \\ 3x \equiv 6 \pmod 8, \\ 7x \equiv 2 \pmod 6; \end{cases}$

3.2.38. $\begin{cases} 8x \equiv 3 \pmod 7, \\ 2x \equiv 1 \pmod 5, \\ 7x \equiv 5 \pmod 8; \end{cases}$

3.2.39. $\begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod 8, \\ 7x \equiv 3 \pmod 4, \\ 11x \equiv 1 \pmod 6; \end{cases}$

3.2.40. $\begin{cases} 3x \equiv 4 \pmod 8, \\ 7x \equiv 3 \pmod 5, \\ 5x \equiv 8 \pmod 6. \end{cases}$

За допомогою конгруенцій розв’язати в цілих числах невизначені рівняння:

3.2.41. $11x + 19y = 13;$

3.2.42. $22x + 41y = 34;$

3.2.43. $5x + -8y = 11;$

3.2.44. $16x + 13y = 38;$

3.2.45. $-7x + 6y = 27;$

3.2.46. $19x + 13y = 33;$

3.2.47. $98x - 35y = 42;$

3.2.48. $-23x + 39y = 65;$

3.2.49. $32x - 22y = -78;$

3.2.50. $42x + 63y = -69.$

3.3. Порядки чисел за даним модулем, первісні корені, індекси

Приклади розв’язань задач

Задача № 24. Знайти всі первісні корені за модулем 18.

Розв’язання.

Первісні корені за модулем 18 містяться серед чисел зведеної системи лишків за модулем 18

$$B = \{1,5,7,11,13,17\},$$

яку складають $\varphi(18) = 6$ елементів.

Елемент $a \in B$ буде первісним коренем за модулем 18 лише тоді, коли його порядок за модулем 18 дорівнює 6, тобто $P_{18}(a) = \varphi(18)$.

Знайдемо порядок за модулем 18 кожного елемента множини B. Порядок будемо шукати серед чисел 1, 2, 3, 6, оскільки він є дільником числа $\varphi(18) = 6$.

1. $a = 1$. $1^1 \equiv 1 (\bmod 18)$. Звідси $P_{18}(1) = 1$.
2. $a = 5$. $5^1 \equiv 5 (\bmod 18)$, $5^2 \equiv 25 \equiv 7 (\bmod 18)$, $5^3 \equiv 35 \equiv -1 (\bmod 18)$, $5^6 \equiv (-1)^2 \equiv 1 (\bmod 18)$. Звідси $P_{18}(5) = 6$.
3. $a = 7$. $7^1 \equiv 7 (\bmod 18)$, $7^2 \equiv 49 \equiv -5 (\bmod 18)$, $7^3 \equiv -35 \equiv 1 (\bmod 18)$. Звідси $P_{18}(7) = 3$.
4. $a = 11$. $11^1 \equiv -7 (\bmod 18)$, $11^2 \equiv (-7)^2 \equiv 49 \equiv -5 (\bmod 18)$, $11^3 \equiv -55 \equiv -1 (\bmod 18)$, $11^6 \equiv (-1)^2 \equiv 1 (\bmod 18)$. Звідси $P_{18}(11) = 6$.
5. $a = 13$. $13^1 \equiv -5 (\bmod 18)$, $13^2 \equiv (-5)^2 \equiv 25 \equiv 7 (\bmod 18)$, $13^3 \equiv 91 \equiv 1 (\bmod 18)$. Звідси $P_{18}(13) = 3$.
6. $a = 17$. $17^1 \equiv -1 (\bmod 18)$, $17^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 (\bmod 18)$. Отже, $P_{18}(17) = 2$.

Порядок 6 за модулем 18 із елементів множини B мають лише числа 5 і 11. Це і є шукані первісні корені.

Відповідь: 5, 11.

Задача № 25. Скласти таблиці індексів та антиіндексів за модулем 19.

Розв’язання.

Знайдемо один із первісних коренів за модулем 19. Безпосередньою перевіркою покажемо, що число 10 – первісний корінь за модулем 19. Дійсно, $\varphi(19)=18$, натуральні дільники числа 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Оскільки $10^1 \equiv -9(\mathrm{mod}\,19)$, $10^2 \equiv 5(\mathrm{mod}\,19)$, $10^3 \equiv -7(\mathrm{mod}\,19)$, $10^6 \equiv 11(\mathrm{mod}\,19)$, $10^9 \equiv -1(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{18} \equiv 1(\mathrm{mod}\,19)$, то $P_{19}(10)=18$, то число 10 – первісний корінь за модулем 19.

Візьмемо число 10 за основу таблиці індексів і знайдемо найменші невід'ємні лишки степенів числа 10 від 0 до 17 за модулем 19:

$10^0 \equiv 1(\mathrm{mod}\,19)$, $10^6 \equiv 11(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{12} \equiv 7(\mathrm{mod}\,19)$,

$10^1 \equiv 10(\mathrm{mod}\,19)$, $10^7 \equiv 15(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{13} \equiv 13(\mathrm{mod}\,19)$,

$10^2 \equiv 5(\mathrm{mod}\,19)$, $10^8 \equiv 17(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{14} \equiv 16(\mathrm{mod}\,19)$,

$10^3 \equiv 12(\mathrm{mod}\,19)$, $10^9 \equiv 18(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{15} \equiv 8(\mathrm{mod}\,19)$,

$10^4 \equiv 6(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{10} \equiv 9(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{16} \equiv 4(\mathrm{mod}\,19)$,

$10^5 \equiv 3(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{11} \equiv 14(\mathrm{mod}\,19)$, $10^{17} \equiv 2(\mathrm{mod}\,19)$.

Складаємо таблицю індексів за модулем 19 і основою 10:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	17	5	16	2	4	12	15	10
1	1	6	3	13	11	7	14	8	9	

Таблиця із двома входами: номер рядка – число десятків, номер стовпця – число одиниць заданого числа. Наприклад, на перетині рядка з номером 1 і стовпця з номером 7 знаходимо індекс числа 17, рівний 8.

Із таблиці індексів легко одержати таблицю антиіндексів:

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	10	5	12	6	3	11	15	17	18
1	9	14	7	13	16	8	4	2		

Задача № 26. Розв'язати конгруенцію $15x^{17} \equiv 11 \pmod{17}$.

Розв'язання.

Беремо індекси від обох частин конгруенції

$$ind15 + 7indx \equiv ind11 \pmod{16}.$$

За таблицею індексів за модулем 17 (див. додаток), знаходимо:

$$ind15 = 6,\ ind11 = 7,$$

а тому

$$7indx \equiv 1 \pmod{16}.$$

Одержали лінійну алгебраїчну конгруенцію відносно $indx$. Оскільки $(7,\ 16) = 1$, то конгруенція має єдиний розв'язок. Знайдемо його штучним способом.

$7indx \equiv 1 \pmod{16} \Leftrightarrow 7indx \equiv 49 \pmod{16} \Leftrightarrow indx \equiv 7 \pmod{16}$.

Отже,

$$indx \equiv 7 \pmod{16}.$$

З останньої конгруенції за таблицею антиіндексів за модулем 17 знаходимо розв'язок даної двочленної конгруенції:

$$x \equiv 11 \pmod{17}.$$

Відповідь: $11 \pmod{17}$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти всі первісні корені за модулем m:

3.3.1. $m = 17$; 3.3.2. $m = 13$; 3.3.3. $m = 22$;

3.3.4. $m = 26$; 3.3.5. $m = 27$; 3.3.6. $m = 23$.

Знайти найменший первісний корінь за модулем m:

3.3.7. $m = 25$; 3.3.8. $m = 34$; 3.3.9. $m = 49$;

3.3.10. $m = 50$; 3.3.11. $m = 81$; 3.3.12. $m = 38$.

Скласти таблиці індексів та антиіндексів за простим модулем p:

3.3.13. $p = 23$; 3.3.14. $p = 29$; 3.3.15. $p = 31$;

3.3.16. $p = 37$; 3.3.17. $p = 41$; 3.3.18. $p = 43$;

3.3.19. $p = 53$; 3.3.20. $p = 59$.

Розв’язати двочленні конгруенції:

3.3.21. $37x^{15} \equiv 62 \pmod{73}$; 3.3.22. $37x^{8} \equiv 59 \pmod{61}$;

3.3.23. $8x^{26} \equiv 37 \pmod{41}$; 3.3.24. $23x^{3} \equiv 15 \pmod{73}$;

3.3.25. $11x^{3} \equiv 6 \pmod{79}$; 3.3.26. $37x^{15} \equiv 62 \pmod{73}$;

3.3.27. $5x^{4} \equiv 3 \pmod{11}$; 3.3.28. $2x^{8} \equiv 5 \pmod{13}$;

3.3.29. $2x^{3} \equiv 17 \pmod{41}$; 3.3.30. $27x^{5} \equiv 25 \pmod{31}$.

§ 4. КІЛЬЦЯ

4.1. Ідеали кільця. Фактор-кільце

Приклади розв'язань задач

Задача № 27. Довести, що в кільці $M(3,R)$ дійсних квадратних матриць порядку 3 підмножина матриць

$$L=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}\right\},$$

у яких перший рядок нульовий, утворює правий ідеал.

Розв'язання.

Нехай

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & k_3\\ l_1 & l_2 & l_3\end{pmatrix}$$

– два довільні елементи множини L.

Тоді

$$A-B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ m_1-k_1 & m_2-k_2 & m_3-k_3\\ n_1-l_1 & n_2-l_2 & n_3-l_3\end{pmatrix}\in L.$$

Звідси для довільних $A,B\in L$ завжди $A-B\in L$.

Тепер нехай

$$C=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}$$

– довільні елементи із $M(3,R)$ і L відповідно. Тоді

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_1a_1 + m_2b_1 + m_3c_1 & m_1a_2 + m_2b_2 + m_3c_2 & m_1a_3 + m_2b_3 + m_3c_3 \\ n_1a_1 + n_2b_1 + n_3c_1 & n_1a_2 + n_2b_2 + n_3c_2 & n_1a_3 + n_2b_3 + n_3c_3 \end{pmatrix} \in L.$$

Звідси для довільного $C \in M(3,R)$, довільного $A \in L$ завжди $AC \in L$.

Отже, L – правий ідеал кільця $M(3,R)$.

Задача № 28. Побудувати фактор-кільце $3Z/\langle 12\rangle$ кільця цілих чисел, кратних 3, за його ідеалом $\langle 12\rangle$, породженим числом 12. Скласти таблиці додавання і множення для елементів фактор-кільця. Знайти всі дільники нуля цього фактор-кільця.

Розв'язання.

$$3Z = \{3k \mid k \in Z\} = \{\ldots,-12,-9,-6,-3,0,3,6,9,12,\ldots\},$$

$$\langle 12\rangle = \{12l \mid l \in Z\} = \{\ldots,-48,-36,-24,-12,0,12,24,36,48,\ldots\}.$$

Як відомо, фактор-кільце $3Z/\langle 12\rangle$ кільця $3Z$ за його ідеалом $\langle 12\rangle$ є сукупністю суміжних класів $3k+\langle 12\rangle$, де $k \in Z$.

Нехай $3k_1+\langle 12\rangle$ і $3k_2+\langle 12\rangle$ – суміжні класи з представниками $3k_1$ і $3k_2$ відповідно за ідеалом $\langle 12\rangle$. Якщо $3k_1+\langle 12\rangle = 3k_2+\langle 12\rangle$, то $3k_1-3k_2 = 3(k_1-k_2) \vdots 12$, звідки $(k_1-k_2) \vdots 4$. Різниця двох цілих чисел поділяється на 4 тоді і тільки тоді, коли ці числа при діленні на 4 дають однакові остачі. Існують чотири остачі при діленні на 4: 0, 1, 2, 3, а, отже, існують чотири різні суміжні класи кільця $3Z$ за ідеалом $\langle 12\rangle$:

$\overline{0} = 0+\langle 12\rangle = \{\ldots,-48,-36,-24,-12,0,12,24,36,48,\ldots\}$,

$\overline{3} = 3+\langle 12\rangle = \{\ldots,-45,-33,-21,-9,3,15,27,39,51,\ldots\}$,

$\overline{6} = 6+\langle 12\rangle = \{\ldots,-42,-30,-18,-6,6,18,30,42,54,\ldots\}$,

$\overline{9} = 9 + \langle 12 \rangle = \{..., -39, -27, -15, -3, 9, 21, 33, 45, 57, ...\}$.

Побудовані класи лишків $\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}$ вичерпують усі класи лишків за модулем $\langle 12 \rangle$.

Як відомо, у фактор-кільці, елементами якого є суміжні класи за ідеалом I, операції додавання і множення вводяться так:

1) $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$;

2) $(a+I)(b+I)=ab+I$.

Користуючись цими формулами, складемо таблиці додавання і множення для класів лишків $\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}$.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$

За таблицею множення дільником нуля є клас лишків $\overline{6}$, оскільки $\overline{6} \neq \overline{0}$ і $\overline{6} \cdot \overline{6} = \overline{0}$.

Завдання для самостійної роботи

Чи є ідеалами такі підмножини:

4.1.1. Множина цілих чисел, кратних 18, у кільці $6Z = \{6k \mid k \in Z\}$;

4.1.2. Множина суто уявних комплексних чисел $M = \{ai \mid a \in R\}$ у кільці комплексних чисел C;

4.1.3. Множина чисел виду $a+bi$, де $a, b \in 3Z$, в кільці $Z[i] = \{a+bi \mid a, b \in Z\}$;

4.1.4. Множина чисел виду $a+b\sqrt{3}$, де $a, b \in 7Z$, в кільці $Z[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3} \,|\, a, b \in Z\}$;

4.1.5. Множина дійсних функцій $f(x)$, для яких $f(3)=0$, в кільці неперервних на відрізку [0; 5] дійсних функцій від змінної x;

4.1.6. Множина матриць $S=\left\{\left.\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| m, n \in Z\right\}$ у кільці $M(2, Z)$;

4.1.7. Множина матриць $S=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right| a, b \in R\right\}$ у кільці $M(2, R)$;

4.1.8. Множина матриць $S=\left\{\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}\right| a, b \in Q\right\}$ у кільці $M(3, Q)$;

4.1.9. Множина матриць $S=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\right| a, b \in Z\right\}$ у кільці $M(2, Z)$;

4.1.10. Множина дійсних матриць $S=\left\{\left.\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right| a_1+b_2+c_3=0\right\}$ у кільці $M(3, R)$?

Побудувати фактор-кільце S/I кільця S за його ідеалом I. Скласти таблиці додавання і множення для елементів фактор-кільця. Знайти всі дільники нуля цього фактор-кільця:

4.1.11. $S=Z, I=\langle 5\rangle=\{5k \,|\, k \in Z\}$;

4.1.12. $S=3Z=\{3k \,|\, k \in Z\}, I=\langle 15\rangle=\{15k \,|\, k \in Z\}$;

4.1.13. $S=4Z=\{4k \,|\, k \in Z\}, I=\langle 20\rangle=\{20k \,|\, k \in Z\}$;

4.1.14. $S=6Z=\{6k \,|\, k \in Z\}, I=\langle 36\rangle=\{36k \,|\, k \in Z\}$;

4.1.15. $S = 2Z = \{2k \mid k \in Z\}$, $I = \langle 14 \rangle = \{14k \mid k \in Z\}$;

4.1.16. $S = 3Z = \{3k \mid k \in Z\}$, $I = \langle 21 \rangle = \{21k \mid k \in Z\}$;

4.1.17. $S = 2Z = \{2k \mid k \in Z\}$, $I = \langle 12 \rangle = \{12k \mid k \in Z\}$;

4.1.18. $S = 4Z = \{4k \mid k \in Z\}$, $I = \langle 16 \rangle = \{16k \mid k \in Z\}$;

4.1.19. $S = 5Z = \{5k \mid k \in Z\}$, $I = \langle 25 \rangle = \{25k \mid k \in Z\}$;

4.1.20. $S = 7Z = \{7k \mid k \in Z\}$, $I = \langle 35 \rangle = \{35k \mid k \in Z\}$.

§ 5. МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

5.1. Многочлени над областю цілісності

Приклади розв'язань задач

Задача № 29. Знайти необхідні і достатні умови того, що:

а) в кільці $Z[x]$ многочлен $f(x) = x^3 - bx + c$ поділяється на многочлен $g(x) = x^2 - ax + 5$;

б) в кільці $K_7[x]$ многочлен $f(x) = x^3 - \overline{6}x^2 - bx - 2$ поділяється на многочлен $g(x) = x^2 + ax + \overline{1}$.

Розв'язання.

а) Виконаємо ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ стовпчиком:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - \qquad\qquad bx + c & x^2 - ax + 5 \\ \cline{2-2}
-\;\; x^3 - ax^2 + \qquad 5x & x + a \\ \cline{1-1}
-\;\; ax^2 - (b+5)x + c & \\
ax^2 - \qquad a^2 x + 5a & \\ \cline{1-1}
(a^2 - b - 5)x + (-5a + c) &
\end{array}
$$

Одержали $f(x) = (x + a)g(x) + r(x)$, де $r(x) = (a^2 - b - 5)x + (-5a + c)$.

Необхідною і достатньою умовою подільності $f(x)$ на $g(x)$ у кільці $Z[x]$ є умова, що $r(x) = 0$. Звідки a, b, c – цілі числа, що задовольняють систему

$$
\begin{cases}
a^2 - b - 5 = 0, \\
-5a + c \quad = 0.
\end{cases}
$$

Виразивши b і c через a, дістанемо

$$\begin{cases} b = a^2 - 5, \\ c = 5a,\ a \in Z. \end{cases}$$

Відповідь: $b = a^2 - 5, c = 5a, a \in Z.$

б) Розділимо многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ стовпчиком:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - \overline{6}x^2 + \quad bx - \overline{2} & x^2 + ax + \overline{1} \\
& \underline{x^3 + ax^2 + \qquad\quad x \quad} & x - (a + \overline{6}) \\
- & -(a+\overline{6})x^2 + (b - \overline{1})x - \overline{2} & \\
& \underline{-(a+\overline{6})x^2 - a(a+\overline{6})x - (a+\overline{6})} & \\
& (a^2 + \overline{6}a + b - \overline{1})x + (a + \overline{4}) &
\end{array}$$

Одержали остачу $r(x) = (a^2 + \overline{6}a + b - \overline{1})x + (a + \overline{4})$. Тоді $f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow r(x) = 0 \Leftrightarrow a + \overline{4} = 0 \wedge a^2 + \overline{6}a + b - \overline{1} = 0 \Leftrightarrow a = \overline{3} \wedge b = \overline{2}$.

Відповідь: $a = \overline{3}, b = \overline{2}$.

Задача № 30. Користуючись схемою Горнера, знайти значення многочлена $f(x) = x^6 - x^5 - 3x^2 + 1$ і його похідних при $x = -2$.

Розв'язання.

Знайдемо за схемою Горнера розклад многочлена $f(x)$ за степенями $x + 2$.

	1	– 1	0	0	– 3	0	1
– 2	1	– 3	6	–12	21	–42	85
– 2	1	– 5	16	–44	109	–260	
– 2	1	– 7	30	–104	317		
– 2	1	– 9	48	–200			
– 2	1	–11	70				
– 2	1	–13					
– 2	1						

$$f(x) = 85 - 260(x+2) + 317(x+2)^2 - 200(x+2)^3 + 70(x+2)^4 -$$
$$-13(x+2)^5 + (x+2)^6.$$

За формулою Тейлора

$$f(x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3 +$$
$$+\frac{f^{IV}(-2)}{4!}(x+2)^4 + \frac{f^{V}(-2)}{5!} \times (x+2)^5 + \frac{f^{VI}(-2)}{6!}(x+2)^6.$$

Врахувавши однозначність розкладу многочлена $f(x)$ за степенями двочлена $x+2$, ми можемо прирівняти коефіцієнти при відповідних степенях $x+2$:

$$f(-2) = 85; \quad \frac{f'(-2)}{1!} = -260 \Rightarrow f'(-2) = -260; \quad \frac{f''(-2)}{2!} = 317 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(-2) = 634; \quad \frac{f'''(-2)}{3!} = -200 \Rightarrow f'''(-2) = -1200; \quad \frac{f^{IV}(-2)}{4!} =$$
$$= 70 \Rightarrow f^{IV}(-2) = 1680; \quad \frac{f^{V}(-2)}{5!} = -13 \Rightarrow f^{V}(-2) = -1560;$$
$$\frac{f^{VI}(-2)}{6!} = 1 \Rightarrow f^{VI}(-2) = 720.$$

Відповідь: $f(-2) = 85$, $f'(-2) = -260$, $f''(-2) = 634$, $f'''(-2) = -1200$, $f^{IV}(-2) = 1680$, $f^{V}(-2) = -1560$, $f^{VI}(-2) = 720$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти всі значення a, при яких многочлен $f(x) \in K[x]$ є квадратом деякого многочлена $g(x)$ із цього самого кільця, і записати $g(x)$:

5.1.1. $f(x) = 9x^4 + 42x^3 + ax^2 + 1, K = Z;$

5.1.2. $f(x) = 4x^4 + ax^2 + 3, K = R;$

5.1.3. $f(x)=x^4+2ix^3-ax^2-4x-4, K=C;$

5.1.4. $f(x)=-x^4+4ix^2+a, K=C;$

5.1.5. $f(x)=x^4-\overline{5}x^3+ax^2+\overline{2}x-\overline{6}, K=Z_{11}.$

Знайти необхідні і достатні умови того, що в кільці $K[x]$ многочлен $f(x)$ поділяється на многочлен $\mathrm{g}(x)$:

5.1.6. $f(x)=x^4+8x^3-bx^2+29x-c, g(x)=x^2-ax+1, K=Q;$

5.1.7. $f(x)=x^4+6x^3+2x^2+bx-3, g(x)=x^2+a, K=Z;$

5.1.8. $f(x)=x^3+x^2+bx+c, g(x)=x^2+ax+1, K=R;$

5.1.9. $f(x)=\overline{3}x^3+bx^2+x, g(x)=x^2+ax, K=Z_5;$

5.1.10. $f(x)=x^4+\overline{2}x^3-\overline{2}x^2+bx-\overline{1}, g(x)=x^2-ax+\overline{3}, K=Z_7.$

Користуючись схемою Горнера, знайти значення многочлена $f(x)$ і його похідних при $x=x_0$:

5.1.11. $f(x)=x^6-3x+1,\ x_0=-2;$

5.1.12. $f(x)=2x^5-3x^4-x,\ x_0=3;$

5.1.13. $f(x)=x^7-3x^2+1,\ x_0=1;$

5.1.14. $f(x)=x^6-4x^2+4x-5,\ x_0=-2;$

5.1.15. $f(x)=2x^6-x^2+1,\ x_0=2;$

5.1.16. $f(x)=x^7-x^3-3,\ x_0=1;$

5.1.17. $f(x)=x^6-x^3-x+1,\ x_0=2;$

5.1.18. $f(x)=x^7+3x-1,\ x_0=-1;$

5.1.19. $f(x)=x^6-x^4+2x^2-3,\ x_0=-2;$

5.1.20. $f(x)=x^7-x^3-2x+1,\ x_0=1.$

5.2. Многочлени над полем

Приклади розв'язань задач

Задача № 31. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 5x^3 + x^2 - x - 2$ і $g(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6$ із кільця $R[x]$.

Розв'язання.

Для знаходження найбільшого спільного дільника скористаємось алгоритмом Евкліда. Ділення многочленів виконаємо стовпчиком.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^5 + 3x^4 + 5x^3 + x^2 - x - 2 & x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6 \\
\underline{2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 12x} & 2x + 5 \\
-\,5x^4 - x^3 + 3x^2 - 13x - 2 & \\
\underline{5x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x + 30} & \\
4x^3 - 12x^2 - 8x - 32 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6 & x^3 - 3x^2 - 2x - 8 \\
\underline{x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 8x} & x + 2 \\
-\,2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 & \\
\underline{2x^3 - 6x^2 - 4x - 16} & \\
11x^2 + 11x + 22 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - 3x^2 - 2x - 8 & x^2 + x + 2 \; = (f, g) \\
\underline{x^3 + x^2 + 2x} & x - 4 \\
-\,-4x^2 - 4x - 8 & \\
\underline{-4x^2 - 4x - 8} & \\
0 &
\end{array}
$$

Отже, $(f, g) = x^2 + x + 2$.

Для знаходження НСК скористаємося формулою $[f,g]=\dfrac{fg}{(f,g)}$.

Тоді $[f,g]=\dfrac{(2x^5+3x^4+5x^3+x^2-x-2)(x^4-x^3+3x^2-x+6)}{x^2+x+2}=$

$=(2x^5+3x^4+5x^3+x^2-x-2)(x^2-2x+3)$.

Відповідь: x^2+x+2 і $(2x^5+3x^4+5x^3+x^2-x-2)(x^2-2x+3)$.

Задача № 32. Для многочленів $f(x)=x^4-\overline{2}x^3+\overline{4}x^2+\overline{3}x-\overline{1}$ і $g(x)=x^3+\overline{4}x^2-\overline{3}x+\overline{3}$ із кільця $K_5[x]$ знайти в цьому кільці такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f,g)$.

Розв'язання.

За алгоритмом Евкліда знайдемо найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^4-\overline{2}x^3+\overline{4}x^2+\overline{3}x-\overline{1} & x^3+\overline{4}x^2-\overline{3}x+\overline{3} \\
\underline{x^4+\overline{4}x^3-\overline{3}x^2+\overline{3}x\qquad} & \overline{x-\overline{1}\qquad\qquad\qquad} \\
-\ -x^3+\overline{2}x^2-\qquad\overline{1} & \\
\underline{-x^3-\overline{4}x^2+\overline{3}x-\overline{3}} & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^3+\overline{4}x^2-\overline{3}x+\overline{3} & x^2-\overline{3}x+\overline{2}=r_1(x) \\
\underline{x^3-\overline{3}x^2+\overline{2}x\qquad} & \overline{x+\overline{2}\qquad\qquad} \\
-\ \overline{2}x^2+\qquad\overline{3} & \\
\underline{\overline{2}x^2-x+\ \overline{4}} & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^2-\overline{3}x+\overline{2} & x-\overline{1}\ =r_2(x)=(f,g) \\
\underline{x^2-\ x\qquad} & \overline{x-\overline{2}\quad} \\
-\ -\overline{2}x+\overline{2} & \\
\underline{-\overline{2}x+\overline{2}} & \\
0 & \\
\end{array}
$$

Отже, $(f,g)=x-\overline{1}$. Виконане ділення запишемо у вигляді рівностей:

$$f(x)=(x-\overline{1})g(x)+r_1(x),\ g(x)=(x+\overline{2})r_1(x)+(f,\mathrm{g}).$$

Звідки $r_1(x)=f(x)-(x-\overline{1})g(x),\ (f,\mathrm{g})=g(x)-(x+\overline{2})r_1(x)$. Підставляючи в другу рівність першу, одержимо:

$$(f,\mathrm{g})=g(x)-(x+\overline{2})(f(x)-(x-\overline{1})g(x))=$$

$$=-(x+\overline{2})f(x)+(1+(x+\overline{2})(x-\overline{1}))g(x)=-(x+\overline{2})f(x)+(x^2+x-\overline{1})g(x).$$

Звідки $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f,g)$, де $u(x)=-x-\overline{2}$, $v(x)=x^2+x-1$.

Відповідь: $u(x)=-x-\overline{2}$, $v(x)=x^2+x-1$.

Завдання для самостійної роботи

Визначити найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$:

5.2.1. $f(x)=x^4+4x^3+x^2-5x+3$,

$\mathrm{g}(x)=2x^4+6x^3-3x^2-8x+3$ в кільці $Q[x]$;

5.2.2. $f(x)=x^5+2x^4+x^3-x^2-3$, $\mathrm{g}(x)=x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1$ в кільці $Q[x]$;

5.2.3. $f(x)=x^5+x^4+4x^3+4x^2+4x+1$,

$\mathrm{g}(x)=3x^3+x^2+x-2$ в кільці $Q[x]$;

5.2.4. $f(x)=x^4+x^3-4x^2-3x-2$,

$\mathrm{g}(x)=3x^3-3x^2-5x-2$ в кільці $\mathrm{R}[x]$;

5.2.5. $f(x)=x^4+2x^3-2x-1$,

$\mathrm{g}(x)=x^3-x^2+3x-3$ в кільці $\mathrm{R}[x]$;

5.2.6. $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-6$,

$\mathrm{g}(x)=2x^3+2x-1$ в кільці $\mathrm{R}[x]$;

5.2.7. $f(x)=\overline{2}x^5+x^4+x^3+\overline{3}x^2-x+\overline{2}$,

$\mathrm{g}(x)=x^5+\overline{3}x^4-\overline{2}x^3-\overline{3}x-\overline{2}$ в кільці $\mathrm{Z}_5[x]$;

5.2.8. $f(x)=\overline{2}x^4-\overline{5}x^3+\overline{3}x^2+\overline{4}x+\overline{3}$,

$\mathrm{g}(x)=x^3-\overline{4}x+\overline{1}$ в кільці $\mathrm{Z}_7[x]$;

5.2.9. $f(x)=x^4+3ix^3-2x^2+3x+6i$,

$\mathrm{g}(x)=x^3+(1+2i)x^2+4$ в кільці $\mathrm{C}[x]$;

5.2.10. $f(x)=x^5+2ix^4+ix^3-x^2+i$,

$\mathrm{g}(x)=2x^4-ix^3+4ix^2+x-2$ в кільці $\mathrm{C}[x]$.

Знайти такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, щоб для даних многочленів $f(x)$ і $g(x)$ виконувалась умова $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f,g)$:

5.2.11. $f(x)=x^4+2x^3-4x^2-3x$,

$\mathrm{g}(x)=x^4+4x^3+x^2-5x+3$ в кільці $\mathrm{Q}[x]$;

5.2.12. $f(x)=x^4-x^3-3x^2-x-4$,

$\mathrm{g}(x)=2x^5+3x^4+3x^3+x^2+x-2$ в кільці $\mathrm{Q}[x]$;

5.2.13. $f(x)=x^5+x^4+7x^3+5x^2+5x-1$,

$\mathrm{g}(x)=3x^3+x^2+x-2$ в кільці $\mathrm{Q}[x]$;

5.2.14. $f(x)=x^4+4x^3-7x^2-8x-4$,

$\mathrm{g}(x)=3x^3-3x^2-5x-2$ в кільці $\mathrm{R}[x]$;

5.2.15. $f(x)=x^4+3x^3-x^2+x-4$,

$\mathrm{g}(x)=x^3-x^2+3x-3$ в кільці $\mathrm{R}[x]$;

5.2.16. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2x - 5$,

$g(x) = 2x^3 + 2x - 1$ в кільці $R[x]$;

5.2.17. $f(x) = x^5 - \overline{2}x^4 + \overline{3}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}$,

$g(x) = x^5 - \overline{2}x^4 - \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}$ в кільці $Z_5[x]$;

5.2.18. $f(x) = \overline{2}x^4 - \overline{4}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{4}$,

$g(x) = x^3 + \overline{3}x - \overline{6}$ в кільці $Z_7[x]$;

5.2.19. $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3ix + 6i$,

$g(x) = -ix^3 - (1+2i)x^2 + 4$ в кільці $C[x]$;

5.2.20. $f(x) = x^5 + 2(i+1)x^4 + (4i-1)x^2 + x + i - 2$,

$g(x) = 2x^4 - ix^3 + 4ix^2 + x - 2$ в кільці $C[x]$.

5.3. Звідні і незвідні многочлени

Приклади розв'язань задач

Задача № 33. Методом невизначених коефіцієнтів розкласти многочлен $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 7x - 6$ у добуток незвідних множників над полем Q.

Розв'язання.

Відомо, що многочлен із цілими коефіцієнтами звідний у кільці $Q[x]$ тоді і лише тоді, коли він звідний у кільці $Z[x]$. Тому розкладатимемо $f(x)$ у добуток незвідних множників над кільцем цілих чисел *Z*.

Нехай многочлен $f(x)$ звідний у кільці $Z[x]$, тобто його можна розкласти в добуток двох многочленів додатного степеня з цілими коефіцієнтами. Розкладемо $f(x)$ на множники методом невизначених коефіцієнтів. Можливі два випадки:

1) степінь обох многочленів рівний 2;

2) один множник має степінь 1, а другий 3.

Нехай

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(mx^2 + nx + l).$$

Тоді $x^4 + x^3 - 3x^2 - 7x - 6 = amx^4 + (an + bm)x^3 + (al + bn + cm)x^2 + (bl + cn)x + cl$, звідси

$$\begin{cases} am = 1, \\ an + bm = 1, \\ al + bn + cm = -3, \\ bl + cn = 7, \\ cl = -6. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему в цілих числах. Із першого рівняння знаходимо $a = m = 1$ або $a = m = -1$. Оскільки існування розкладу

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(mx^2 + nx + l)$$

передбачає також існування розкладу

$$f(x) = (-ax^2 - bx - c)(-mx^2 - nx - l),$$

то можемо вважати $a > 0$, тобто обмежитись випадком $a = m = 1$. З останнього рівняння системи маємо: $c = \pm 1, l = \mp 6$; $c = \pm 2, l = \mp 3$; $c = \pm 3, l = \mp 2$; $c = \pm 6, l = \mp 1$.

Отже, потрібно розглянути кожний із восьми можливих варіантів:

1) $a = m = c = 1$, $l = -6$; 2) $a = m = 1$, $c = -1$, $l = 6$;

3) $a = m = 1$, $c = 2$, $l = -3$; 4) $a = m = 1$, $c = -2$, $l = 3$;

5) $a = m = 1$, $c = 3$, $l = -2$; 6) $a = m = 1$, $c = -3$, $l = 2$;

7) $a = m = 1$, $c = 6$, $l = -1$; 8) $a = m = l = 1$, $c = -6$.

Якщо $a = m = c = 1$, $l = -6$, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} b + n = 1, \\ bn = 2, \\ -6b + n = 7. \end{cases}$$

Ця система розв'язку не має, оскільки $b = -\dfrac{6}{7}$, $c = \dfrac{13}{7}$ – розв'язок першого і третього рівнянь, який не задовольняє другому рівнянню. Із семи варіантів, що залишилися, лише шостий варіант дає сумісну систему

$$\begin{cases} b + n = 1, \\ bn = -2, \\ 2b - 3n = 7, \end{cases}$$

яка має розв'язок: $b = 2, n = -1$.

Отже, $f(x) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - x + 2)$, тобто $f(x)$ – звідний над кільцем *Z*.

Дослідимо на звідність над *Q* одержані множники степеня 2. Квадратний тричлен $x^2 + 2x - 3$ має корені 1 і –3, тому $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, а квадратний тричлен $x^2 - x + 2$ не має раціональних коренів, тому він незвідний над *Q*.

Отже, даний многочлен має такий розклад на незвідні над полем *Q* многочлени:

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)(x^2 - x + 2).$$

Відповідь: $(x - 1)(x + 3)(x^2 - x + 2)$.

Задача № 34. Відокремити кратні множники многочлена $f(x) = x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 19x^2 + 16x + 12$.

Розв’язання.

Нехай $f(x)=\varphi_1\varphi_2^2...\varphi_k^k$.

Знайдемо НСД многочлена $f(x)=x^5+5x^4+11x^3+19x^2+16x+12$ та його похідної $f'(x)=5x^4+20x^3+33x^2+38x+16$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+5x^4+11x^3+19x^2+16x+12 & \underline{5x^4+20x^3+33x^2+38x+16} \\
\_\,5x^5+25x^4+55x^3+95x^2+80x+60 & x+1 \\
\underline{5x^5+20x^4+33x^3+38x^2+16x} & \\
\_\,5x^4+22x^3+57x^2+64x+60 & \\
\underline{5x^4+20x^3+33x^2+38x+16} & \\
2x^3+24x^2+26x+44 & \\
x^3+12x^2+13x+22 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\_\,5x^4+20x^3+33x^2+38x+16 & \underline{x^3+12x^2+13x+22} \\
\underline{5x^4+60x^3+65x^2+110x} & 5x+5 \\
-40x^3-32x^2-72x+16 & \\
\_\,5x^3+4x^2+9x-2 & \\
\underline{5x^3+60x^2+65x+110} & \\
-56x^2-56x-112 & \\
x^2+x+2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\_\,x^3+12x^2+13x+22 & \underline{x^2+x+2} \\
\underline{x^3+x^2+2x} & x+11 \\
\_\,11x^2+11x+22 & \\
\underline{11x^2+11x+22} & \\
0 &
\end{array}
$$

Отже, $d_1=(f,f')=x^2+x+2$.

Знайдемо найбільший спільний дільник многочлена d_1 та його похідної $d_1' = 2x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + \ \ x + 2 & \underline{2x+1} \\
\_2x^2 + 2\,x + 4 & x+1 \\
\underline{2x^2 + \ \ \ x \ \ \ \ \ } & \\
x + 4 & \\
\_2x + 8 & \\
\underline{2x + 1} & \\
7 &
\end{array}
$$

Звідки $d_2 = (d_1, d_1') = 1$.

Знайдемо частку від ділення многочлена f на многочлен d_1.

$$
\begin{array}{r|l}
\_x^5 + \ 5x^4 + 11x^3 + 19x^2 + 16x + 12 & \underline{x^2 + x + 2} \\
\underline{x^5 + \ \ x^4 + \ 2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} & x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \\
\_4x^4 + 9x^3 + 19x^2 + 16x + 12 & \\
\underline{4x^4 + 4x^3 + \ 8x^2 \qquad\qquad\quad} & \\
\_5x^3 + 11x^2 + 16x + 12 & \\
\underline{5x^3 + 5x^2 + \ 10x \qquad} & \\
\_6x^2 + \ \ 6x + 12 & \\
\underline{6x^2 + \ 6x + 12} & \\
0 &
\end{array}
$$

Звідки $q_1 = \dfrac{f}{d_1} = x^3 + 4x^2 + 5x + 6.$

Знайдемо многочлен q_2 як частку від ділення многочлена d_1 на многочлен d_2: $q_2 = \dfrac{d_1}{d_2} = x^2 + x + 2.$

Для знаходження множника φ_1 знайдемо частку від ділення многочлена q_1 на многочлен q_2:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+4x^2+5x+6 & \underline{x^2+x+2} \\ \underline{x^3+\ x^2+2x\quad} & x+3 \\ -\,3x^2+3x+6 & \\ \underline{3x^2+3x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $\varphi_1 = \dfrac{q_1}{q_2} = x+3;\ \varphi_2 = q_2 = x^2+x+2.$

Відповідь: $(x+3)(x^2+x+2)^2$.

Завдання для самостійної роботи

Методом невизначених коефіцієнтів розкласти многочлен $f(x)$ в добуток незвідних множників над полем раціональних чисел Q:

5.3.1. $f(x) = x^4+4x^3+6x^2+4x-15;$

5.3.2. $f(x) = x^4-x^3+5x^2+4x+6;$

5.3.3. $f(x) = 4x^4-7x^3+24x^2+11x-14;$

5.3.4. $f(x) = 2x^4-7x^3-13x^2-9x-5;$

5.3.5. $f(x) = 2x^4+x^3-27x^2+19x-3;$

5.3.6. $f(x) = 5x^4+22x^3+27x^2+4x-4;$

5.3.7. $f(x) = 10x^4+x^3+14x^2+8x+3;$

5.3.8. $f(x) = 7x^4-40x^3+48x^2-25x+6;$

5.3.9. $f(x) = 7x^4-6x^3+6x^2-41x-6;$

5.3.10. $f(x) = 15x^4+x^3+5x^2+x+2.$

Відокремити кратні множники многочлена $f(x)$ із кільця $R[x]$:

5.3.11. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 22x^2 + 25x - 9;$

5.3.12. $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 12x + 4;$

5.3.13. $f(x) = 8x^5 + 20x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 5x - 1;$

5.3.14. $f(x) = 3x^5 - 19x^4 + 35x^3 - 22x^2 + 24x - 9;$

5.3.15. $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 24x^2 + 20x + 16;$

5.3.16. $f(x) = 4x^5 + 15x^3 - 5x^2 + 15x + 9;$

5.3.17. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 23x^2 + 24x - 36;$

5.3.18. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2;$

5.3.19. $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 7x^2 + 10x + 4;$

5.3.20. $f(x) = x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 12x + 4.$

5.4. Многочлени від багатьох змінних

Приклади розв'язань задач

Задача № 35. Виразити через елементарні симетричні многочлени многочлен

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + 1)(x_1^2 + x_3^2 + 1)(x_2^2 + x_3^2 + 1).$$

Розв'язання.

Даний многочлен є сумою чотирьох однорідних многочленів $f_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$,

$f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2),$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $f_4(x_1, x_2, x_3) = 1$

відповідно шостого, четвертого, другого і нульового степенів. Розв'яжемо задачу окремо для кожного многочлена.

За теоремою про вищий член добутку многочленів, вищий член многочлена $f_1(x_1, x_2, x_3)$ дорівнює $x_1^4 x_2^2$. Складаємо допоміжну таблицю.

Система показників вищого члена			Вищий член	Відповідний добуток елементарних симетричних многочленів
x_1	x_2	x_3		
4	2	0	$x_1^4 x_2^2$	$\sigma_1^{4-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^2\sigma_2^2$
4	1	1	$ax_1^4 x_2 x_3$	$a\sigma_1^{4-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = a\sigma_1^3\sigma_3$
3	3	0	$bx_1^3 x_2^3$	$b\sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^0 = b\sigma_2^3$
3	2	1	$cx_1^3 x_2^2 x_3$	$c\sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^1 = c\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2	2	2	$dx_1^2 x_2^2 x_3^2$	$d\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^2 = d\sigma_3^2$

Тому

$$f_1(x_1,\, x_2,\, x_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + a\sigma_1^3\sigma_3 + b\sigma_2^3 + c\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + d\sigma_3^2,$$

де a, b, c, d – невизначені коефіцієнти. Обчислення a, b, c, d подаємо у вигляді такої таблиці.

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	$f_1(x_1,\, x_2,\, x_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + a\sigma_1^3\sigma_3 + b\sigma_2^3 + c\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + d\sigma_3^2$
1	1	0	2	1	0	$2 = 4 + b$
1	1	–2	0	–3	–2	$50 = -27b + 4d$
–1	2	2	3	0	–4	$200 = -108a + 16d$
1	1	1	3	3	1	$8 = 81 + 27a + 27b + 9c + d$

Звідки $a = -2, b = -2, c = 4, d = -1$.

Отже,

$$f_1(x_1,\, x_2,\, x_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2.$$

Виразимо через елементарні симетричні многочлени многочлен

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2).$$

Вищий член $f_2(x_1, x_2, x_3)$ дорівнює x_1^4.

Складаємо допоміжну таблицю.

Система показників вищого члена			Вищий член	Відповідний добуток елементарних симетричних многочленів
x_1	x_2	x_3		
4	0	0	x_1^4	$\sigma_1^{4-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^4$
3	1	0	$ax_1^3x_2$	$a\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=a\sigma_1^2\sigma_2$
2	2	0	$bx_1^2x_2^2$	$b\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=b\sigma_2^2$
2	1	1	$cx_1^2x_2x_3$	$c\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=c\sigma_1\sigma_3$

Звідки маємо:

$$f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sigma_1^4+a\sigma_1^2\sigma_2+b\sigma_2^2+c\sigma_1\sigma_3.$$

За допомогою таблиці визначаємо a, b і c.

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	$f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sigma_1^4+a\sigma_1^2\sigma_2+b\sigma_2^2+c\sigma_1\sigma_3.$
1	1	0	2	1	0	$5=16+4a+b$
1	1	–2	0	–3	–2	$45=9b$
1	1	1	3	3	1	$12=81+27a+9b+3c$

Одержуємо $a=-4, b=5$ і $c=-2$.

Отже,

$$f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+5\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3.$$

Однорідний многочлен другого степеня

$$f_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

досить легко виразити через елементарні симетричні многочлени, скориставшись формулою скороченого множення $\left(x_1+x_2+x_3\right)^2=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$ Звідси одержуємо $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$, а тому

$$f_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=2\sigma_1^2-4\sigma_2.$$

Щодо многочлена $f_4(x_1, x_2, x_3)$, то він залишається рівний 1.

У підсумку маємо:

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) = f_1(x_1,\, x_2,\, x_3) + f_2(x_1,\, x_2,\, x_3) + f_3(x_1,\, x_2,\, x_3) +$$

$$+ f_4(x_1,\, x_2,\, x_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2 + \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 +$$
$$+5\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_1^2 - 4\sigma_2 + 1.$$

Відповідь: $f(x_1,\, x_2,\, x_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 -$
$-\sigma_3^2 + \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_1^2 - 4\sigma_2 + 1.$

Задача № 36. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 1, \\ x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання.

Ліва частина кожного з рівнянь є симетричним многочленом, а в першому рівнянні – елементарним симетричним многочленом. Тоді $x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1$, а, згідно із задачею № 35, $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = \sigma_1{}^2 - 2\sigma_2$. Залишається виразити через елементарні симетричні многочлени многочлен $f(x_1,\, x_2, x_3) = x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3$, який має вищий член $x_1{}^3$. Скористаємося алгоритмом попередньої задачі. Складаємо допоміжну таблицю.

Система показників вищого члена			Вищий член	Відповідний добуток елементарних симетричних многочленів
x_1	x_2	x_3		
3	0	0	x_1^3	$\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3$
2	1	0	$ax_1^2x_2$	$a\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = a\sigma_1\sigma_2$
1	1	1	$bx_1x_2x_3$	$b\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = b\sigma_3$

Звідки $f(x_1,\, x_2, x_3) = \sigma_1{}^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$.

Знаходимо коефіцієнти a і b за такою таблицею:

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	$f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sigma_1^4+a\sigma_1^2\sigma_2+b\sigma_2^2+c\sigma_1\sigma_3.$
1	1	0	2	1	0	$2=8+2a$
1	1	1	3	3	1	$3=27+9a+b$

Звідки $a=-3$ і $b=3$, а тому

$$f(x_1,\ x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Отже, дана система набуває вигляду

$$\begin{cases}\sigma_1=1,\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=1,\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=1,\end{cases}$$

де $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ – елементарні симетричні многочлени від x_1,x_2,x_3, і має єдиний розв’язок: $\sigma_1=1,\sigma_2=\sigma_3=0$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, x_1,x_2,x_3 – корені рівняння третього степеня $t^3-\sigma_1t^2+\sigma_2t-\sigma_3=0$ або $t^3-t^2=0$, а тому $(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)$ – всі розв’язки даної в умові задачі системи.

Відповідь: $(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)$.

Задача № 37. Розв’язати рівняння $\sqrt[4]{15+x}+\sqrt[4]{2-x}=3$.

Розв’язання.

Зробимо заміну: $\sqrt[4]{15+x}=u,\sqrt[4]{2-x}=v.$ Тоді одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^4+v^4=17.\end{cases}$$

Заміна $u+v=\sigma_1$ і $uv=\sigma_2$ дає нам, що $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-$ $-2u^2v^2=((u+v)^2-2uv)^2-2(uv)^2=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-2\sigma_2^2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2.$

Тоді система набуває вигляду

$$\begin{cases}\sigma_1 = 3,\\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 17\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\sigma_1 = 3,\\ \sigma_2^2 - 18\sigma_2 + 32 = 0\end{cases}$$

і має два розв'язки: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2;\ \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 16$.

Повертаючись до змінних u і v, маємо дві такі системи:

$$\begin{cases}u + v = 3,\\ uv = 2\end{cases} \text{ або } \begin{cases}u + v = 3,\\ uv = 16.\end{cases}$$

Друга система розв'язку не має, а розв'язками першої системи є

$$\begin{cases}u_1 = 1,\\ v_1 = 2\end{cases} \text{ та } \begin{cases}u_2 = 2,\\ v_2 = 1.\end{cases}$$

З урахуванням першої заміни маємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{15 + x} = 1,\\ \sqrt[4]{15 + x} = 2,\end{array}\right.$$

яка має розв'язки $x_1 = -14, x_2 = 1$.

Відповідь: –14; 1.

Задача № 38. Розв'язати за допомогою результанта систему рівнянь

$$\begin{cases}3x^2 + 4xy - 2y^2 + 6x + 24y - 24 = 0,\\ 8x^2 + 20xy + 11y^2 - 12x - 6y - 8 = 0.\end{cases}$$

Розв'язання.

Використаємо метод виключення невідомих. Для цього в лівих частинах рівнянь запишемо многочлени за спадними степенями змінної x з коефіцієнтами від змінної y:

$$\begin{cases}3x^2 + (4y + 6)x - 2y^2 + 24y - 24 = 0,\\ 8x^2 + (20y - 12)x + 11y^2 - 6y - 8 = 0.\end{cases}$$

Складаємо результант для цих многочленів $R(y)$ і знаходимо його корені:

$$R(y)=\begin{vmatrix} 3 & 4y+6 & -2y^2+24y-24 & 0 \\ 0 & 3 & 4y+6 & -2y^2+24y-24 \\ 8 & 20y-12 & 11y^2-6y-8 & 0 \\ 0 & 8 & 20y-12 & 11y^2-6y-8 \end{vmatrix}\begin{array}{l} (-3) \\ \\ \\ \\ \end{array}=$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 4y+6 & -2y^2+24y-24 & 0 \\ 0 & 3 & 4y+6 & -2y^2+24y-24 \\ -1 & 8y-30 & 17y^2-78y+64 & 0 \\ 0 & 8 & 20y-12 & 11y^2-6y-8 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (3) \\ \\ \end{array}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 28y-84 & 49y^2-210y+168 & 0 \\ 0 & 3 & 4y+6 & -2y^2+24y-24 \\ -1 & 8y-30 & 17y^2-78y+64 & 0 \\ 0 & 8 & 20y-12 & 11y^2-6y-8 \end{vmatrix}\begin{array}{l} (1/7) \\ \\ \\ \\ \end{array}=$$

$$=(-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4y-12 & 7y^2-30y+24 & 0 \\ 3 & 4y+6 & -2y^2+24y-24 \\ 8 & 20y-12 & 11y^2-6y-8 \end{vmatrix}=$$

$$=-(4y-12)(4y+6)(11y^2-6y-8)-8(7y^2-30y+24)(-2y^2+24y-24)-$$
$$(4y-12)(20y-12)(2y^2-24y+24)+3(7y^2-30y+24)(11y^2-6y-8)=$$
$$=-y^4+12y^3-44y^2+48y=-y(y^3-12y^2+44y-48)=-y(y^2(y-6)-$$
$$-6y(y-6)+8(y-6))=-y(y-6)(y^2-6y+8)=-y(y-6)(y-2)(y-4).$$

Отже, коренями результанта є чотири числа: 0, 2, 4, 6. Підставимо їх у задану систему замість змінної y.

1) Якщо $y = 0$, то одержуємо

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x - 24 = 0, \\ 8x^2 - 12x - 8 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 3(x-2)(x+4) = 0, \\ 4(x-2)(2x+1) = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 2$. Отже, $x_1 = 2,\ y_1 = 0$ – розв'язок заданої системи.

2) Якщо $y = 2$, то одержуємо

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 16 = 0, \\ 8x^2 + 28x + 24 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} (x+2)(3x+8) = 0, \\ 4(x+2)(2x+3) = 0, \end{cases}$$

звідки $x = -2$. Отже, $x_2 = -2,\ y_2 = 2$ – розв'язок заданої системи.

3) Якщо $y = 4$, то одержуємо

$$\begin{cases} 3x^2 + 22x + 40 = 0, \\ 8x^2 + 68x + 144 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} (x+4)(3x+10) = 0, \\ 4(x+4)(2x+9) = 0, \end{cases}$$

звідки $x = -4$. Отже, $x_3 = -4,\ y_3 = 4$ – розв'язок заданої системи.

4) Якщо $y = 6$, то одержуємо

$$\begin{cases} 3x^2 + 30x + 48 = 0, \\ 8x^2 + 108x + 352 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 3(x+8)(x+2) = 0, \\ 4(x+8)(2x+11) = 0, \end{cases}$$

звідки $x = -8$. Отже $x_4 = -8,\ y_4 = 6$ – розв'язок заданої системи.

Відповідь: (2, 0), (–2, 2), (–4, 4), (–8, 6).

Завдання для самостійної роботи

Виразити через елементарні симетричні многочлени многочлен:

5.4.1. $(x_1^2 + x_2x_3)(x_2^2 + x_1x_3)(x_3^2 + x_1x_2)$;

5.4.2. $x_1^4x_2 + x_2^4x_1 + x_1^4x_3 + x_3^4x_1 + x_2^4x_3 + x_3^4x_2$;

5.4.3. $(x_1^2 - x_2 - x_3)(x_2^2 - x_1 - x_3)(x_3^2 - x_2 - x_1)$;

5.4.4. $x_1^5x_2x_3 + x_2^5x_1x_3 + x_3^5x_2x_1$;

5.4.5. $x_1^4x_2 + x_2^4x_1 + x_1^4x_3 + x_3^4x_1 + x_2^4x_3 + x_3^4x_2$;

5.4.6. $(x_1^3 + x_2 + x_3)(x_2^3 + x_1 + x_3)(x_3^3 + x_1 + x_2)$;

5.4.7. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$;

5.4.8. $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;

5.4.9. $x_1^5x_2x_3 + x_2^5x_1x_3 + x_3^5x_2x_1 - x_1 - x_2 - x_3$;

5.4.10. $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)(x_2 + 2x_1 + 3x_3)(x_3 + 2x_2 + 3x_1)$.

Розв'язати системи рівнянь:

5.4.11. $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 31; \end{cases}$ 5.4.12. $\begin{cases} xy = -2, \\ x^4 + y^4 = 17; \end{cases}$

5.4.13. $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + y^3 - 4xy = 1; \end{cases}$ 5.4.14. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ (x^2 + 2)(y^2 + 2) = 33; \end{cases}$

5.4.15. $\begin{cases} x + y + xy = 3, \\ (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 4; \end{cases}$ 5.4.16. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 48, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8; \end{cases}$

5.4.17. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 18; \end{cases}$ 5.4.18. $\begin{cases} x - y + z = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 10; \end{cases}$

5.4.19. $\begin{cases} xy + xz + yz = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 6; \end{cases}$ 5.4.20. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ xyz = -2, \\ (x^3 + 1)(y^3 + 1)(z^3 + 1) = -28. \end{cases}$

Розв'язати рівняння:

5.4.21. $\sqrt{-7 + x} + \sqrt{44 - x} = 7$; 5.4.22. $\sqrt{-13 + x} + \sqrt{47 - x} = 8$;

5.4.23. $\sqrt[3]{10 + x} + \sqrt[3]{6 - x} = 1$; 5.4.24. $\sqrt[3]{13 + x} + \sqrt[3]{15 - x} = 4$;

5.4.25. $\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{2-x}=1;$

5.4.26. $\sqrt[4]{7-x}+\sqrt[4]{90+x}=5;$

5.4.27. $\sqrt[4]{-15+2x}+\sqrt[4]{97-2x}=4;$

5.4.28. $\sqrt[4]{19-x}+\sqrt[4]{253+x}=6;$

5.4.29. $\sqrt[5]{-8+x}+\sqrt[5]{39-x}=1;$

5.4.30. $\sqrt[5]{-4+x}-\sqrt[5]{238+x}=-2.$

Розв'язати за допомогою результанта системи рівнянь:

5.4.31. $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11,\\ x^2+2xy+3y^2=17;\end{cases}$

5.4.32. $\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9,\\ x^2-4xy+5y^2=5;\end{cases}$

5.4.33. $\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=2,\\ 7x^2-2xy+7y^2=4;\end{cases}$

5.4.34. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\ 3x^2-xy+3y^2=33;\end{cases}$

5.4.35. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=13,\\ x^2-xy+y^2=7;\end{cases}$

5.4.36. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7,\\ x^2-4xy+y^2=37;\end{cases}$

5.4.37. $\begin{cases}x^2-3xy+y^2=11,\\ 2x^2-xy+2y^2=12;\end{cases}$

5.4.38. $\begin{cases}2x^2-3xy+2y^2=29,\\ 3x^2-2xy+3y^2=36;\end{cases}$

5.4.39. $\begin{cases}3x^2-xy+3y^2=13,\\ 2x^2-3xy+2y^2=4;\end{cases}$

5.4.40. $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11,\\ x^2+2xy+3y^2=17.\end{cases}$

§ 6. *МНОГОЧЛЕНИ НАД ЧИСЛОВИМИ ПОЛЯМИ. АЛГЕБРАЇЧНІ ЧИСЛА*

6.1. Многочлени над полем комплексних чисел

Приклади розв'язань задач

Задача № 39. Знайти многочлен $f(x)$ найменшого степеня з коефіцієнтами з поля C, який має вільний член 10, подвійний корінь i, прості корені $1-2i$ та $1+2i$.

Розв'язання.

За наслідком з теореми Безу многочлени $(x-i)^2$, $x-1+2i$ та $x-1-2i$ – дільники многочлена $f(x)$. Дільником $f(x)$ також буде многочлен $(x-i)^2(x-1+2i)(x-1-2i) = x^4 - 2(1+i)x^3 + 4(1+i)x^2 +$ $+2(1-5i)x-5$, оскільки многочлени $(x-i)^2$, $x-1+2i$ та $x-1-2i$ є попарно взаємно простими. Звідки

$$f(x) = (x^4 - 2(1+i)x^3 + 4(1+i)x^2 + 2(1-5i)x - 5)g(x),$$

де $g(x) \in C[x]$.

Скориставшись тим, що $f(x)$ має найменший степінь, одержуємо $g(x) = \lambda \in C$. Вільний член многочлена $f(x)$ дорівнює $(-5)\lambda$ і дорівнює 10, тому $\lambda = -2$.

Отже,

$$f(x) = -2x^4 + 4(1+i)x^3 - 8(1+i)x^2 - 4(1-5i)x + 10$$

– шуканий многочлен.

Відповідь: $f(x) = -2x^4 + 4(1+i)x^3 - 8(1+i)x^2 - 4(1-5i)x + 10$.

Задача № 40. Розкласти на незвідні множники над полем C многочлени:

а) $f(x) = (x+2i)^4 + (x-4i)^4 - 272$;

б) $f(x) = (x+2i)(x+4i)(x+6i)(x+8i) + 16$.

Розв'язання.

а) Знайдемо корені многочлена $f(x)$. Тоді необхідно розв'язати рівняння четвертого степеня

$$(x+2i)^4 + (x-4i)^4 - 272 = 0.$$

Заміна $y = \dfrac{x+2i+x-4i}{2} = x - i$ зводить дане рівняння до біквадратного:

$$(y+3i)^4 + (y-3i)^4 - 272 = 0,$$

$$y^4 - 54y^2 - 55 = 0.$$

Звідки

$$(y^2+1)(y^2-55) = 0,$$

$$(y+i)(y-i)(y+\sqrt{55})(y-\sqrt{55}) = 0.$$

Розв'язками останнього рівняння є $y_1 = -i,\ y_2 = i,\ y_3 = -\sqrt{55},\ y_4 = \sqrt{55}$. Повертаючись до заміни, одержуємо корені многочлена $f(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = 2i,\ x_3 = -\sqrt{55} + i,\ x_4 = \sqrt{55} + i$.

Отже,

$$f(x) = x(x-2i)(x+\sqrt{55}-i)(x-\sqrt{55}-i)$$

– шуканий розклад.

Відповідь: $f(x) = x(x-2i)(x+\sqrt{55}-i)(x-\sqrt{55}-i)$.

б) Знайдемо корені многочлена $f(x)$. Ці корені є розв'язками рівняння

$$(x+2i)(x+4i)(x+6i)(x+8i)+16=0$$

або рівносильного йому рівняння

$$(x^2+10ix-16)(x^2+10ix-24)+16=0,$$

яке отримується з попереднього, якщо перемножити $x+2i$ на $x+8i$ та $x+4i$ на $x+6i$.

Заміна $x^2+10ix-16=t$ зводить дане рівняння до квадратного

$$t^2-8t+16=0,$$

яке має два розв'язки $t_1=t_2=4$.

Отже, рівняння $f(x)=0$ можна записати у вигляді

$$(x^2+10ix-20)^2=0,$$

а його коренями є корені квадратного рівняння

$$x^2+10ix-20=0.$$

Звідки $x_1=x_2=-(5-\sqrt{5})i$, $x_3=x_4=-(5+\sqrt{5})i$ – корені многочлена $f(x)$.

Отже,

$$f(x)=(x+(5-\sqrt{5})i)^2(x+(5+\sqrt{5})i)^2$$

– розклад $f(x)$ на незвідні множники над полем C.

Відповідь: $f(x)=(x+(5-\sqrt{5})i)^2(x+(5+\sqrt{5})i)^2$.

Задача № 41. Знайти нормований многочлен $f(x)$ за його коренями x_1^3, $x_1^2x_2^2$ і x_2^3, якщо числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2+(1-i)x+2i=0$.

Розв'язання.

Нехай $f(x)=x^3+mx^2+nx+l$ – шуканий многочлен. За теоремою Вієта маємо

$$\begin{cases} x_1^3 + x_1^2 x_2^2 + x_2^3 = -m, \\ x_1^5 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^5 = n, \\ x_1^5 x_2^5 = -l. \end{cases}$$

Оскільки $x_1 + x_2 = -1 + i$, а $x_1 x_2 = 2i$, то

$m = -(x_1 + x_2)^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) - (x_1 x_2)^2 = -(-1+i)^3 + 6i(-1+i) - (2i)^2 =$

$= -4(1+2i)$, $n = (x_1 x_2)^2((x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 x_2) = (2i)^2((-1+i)^3 -$

$-6i(-1+i) + 2i) = -8(4+5i)$, $l = (x_1 x_2)^5 = (2i)^5 = 32i$.

Отже,

$$f(x) = x^3 - 4(1+i)x^2 - 8(4+5i)x + 32i.$$

Відповідь: $f(x) = x^3 - 4(1+i)x^2 - 8(4+5i)x + 32i$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти многочлен $f(x) \in C[x]$ найменшого степеня за даними коренями і вільним членом:

6.1.1. Прості корені 1, $1-i$, $2+3i$, вільний член 6;

6.1.2. Подвійний корінь $1+i$, прості корені 2, $1-i$, вільний член 16;

6.1.3. Прості корені $2i$, $1-i$, $1+i$, вільний член 4;

6.1.4. Подвійний корінь 3, прості корені $1+2i$, $3-i$, вільний член 300;

6.1.5. Прості корені 3, –2, i, вільний член $12i$;

6.1.6. Подвійний корінь $2+2i$, прості корені 3, $1-i$, вільний член 12;

6.1.7. Прості корені $3+i$, $3-i$, 2, вільний член $40i$;

6.1.8. Подвійний корінь $3+i$, прості корені 1, 4, $-i$, вільний член $3-i$;

6.1.9. Прості корені $1-i$, 2, –2, вільний член 16;

6.1.10. Подвійний корінь –2, прості корені $1+3i$, $2-i$, вільний член *i*.

Розкласти многочлен $f(x)$ на незвідні над полем C множники:

6.1.11. $f(x) = (-2+3i)x^3 + 24 + 16i;$

6.1.12. $f(x) = (x+i)(x+2i)(x+3i)(x+4i)+1;$

6.1.13. $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+6) - 8x^2;$

6.1.14. $f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 4;$

6.1.15. $f(x) = (x+i)^4 + (x-3i)^4 - 32;$

6.1.16. $f(x) = (x^2 - x + 2)^2 - 5x(x^2 - x + 2) + 4x^2;$

6.1.17. $f(x) = x^2(x-1)^2 + 6x^2 - 6x + 8;$

6.1.18. $f(x) = x^4 + 15x^2 - 34;$

6.1.19. $f(x) = x^4 + 9;$

6.1.20. $f(x) = x^8 - 1.$

Знайти нормований многочлен $f(x)$ за даними його коренями, якщо числа x_1 і x_2 є розв’язками рівняння $g(x) = 0$:

6.1.21. $x_1^2 x_2$, $x_1 + x_2$, $x_1 x_2^2$ – корені, $g(x) = ix^2 - 2ix + 2$;

6.1.22. $x_1^3 x_2$, $2x_1 x_2$, $x_1 x_2^3$ – корені, $g(x) = x^2 + (1+i)x + i$;

6.1.23. $2x_1^2 + x_2^2$, $x_1 x_2$, $x_1^2 + 2x_2^2$ – корені, $g(x) = ix^2 + (1+i)x + 3i$;

6.1.24. $2x_1 + x_2$, $x_1 + x_2$, $x_1 + 2x_2$ – корені, $g(x) = x^2 - ix + 2i$;

6.1.25. $3x_1$, $x_1^3 + x_2^3$, $3x_2$ – корені, $g(x) = x^2 - 3ix + 1 - i$;

6.1.26. x_1^2, $x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2$, x_2^2 – корені, $g(x) = x^2 - (2-i)x + 3 + i$;

6.1.27. $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ – корені, $g(x) = x^2 + (4+i)x - 2i$;

6.1.28. $1 - x_1$, $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$, $1 - x_2$ – корені, $g(x) = x^2 + x + i$;

6.1.29. x_1^3, $x_1^2 + x_2^2$, x_2^3 – корені, $g(x) = ix^2 + 2x - 3i$;

6.1.30. $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$, $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ – корені, $g(x) = x^2 + 2x - 2i$.

6.2. Многочлени над полями дійсних і раціональних чисел

Приклади розв'язань задач

Задача № 42. Побудувати многочлен $f(x)$ найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, який при діленні на двочлен $x-3$ дає остачу 15 і має подвійний корінь 2, простий корінь $1-i$.

Розв'язання.

Оскільки $1-i$ корінь многочлена $f(x)\in \mathrm{R}[x]$, то і спряжене до нього число $1+i$ також корінь цього многочлена. За наслідком з теореми Безу $f(x)$ поділяється на $x-1+i$ і поділяється на $x-1-i$. Оскільки 2 – подвійний корінь $f(x)$, то $f(x)$ поділяється на $(x-2)^2$. Многочлени $x-1+i$, $x-1-i$ та $(x-2)^2$ – попарно взаємно прості, тому $f(x)$ поділяється на їх добуток $(x-1+i)(x-1-i)(x-2)^2 = (x^2-2x+2)(x^2-4x+4) = x^4-6x^3+14x^2-16x+8$.

Отже,

$$f(x) = (x^4-6x^3+14x^2-16x+8)g(x),$$

де $g(x)\in R[x]$.

За теоремою Безу остача від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $x-3$ дорівнює $f(3)$, а тому $5g(3)=15$. Нам потрібно знайти многочлен $g(x)\in R[x]$ найменшого степеня, який задовольняє умову $g(3)=3$. Ним буде многочлен нульового степеня $g(x)=3$. А тому $f(x)=3(x^4-6x^3+14x^2-16x+8)=3x^4-18x^3+42x^2-48x+24$ – шуканий многочлен.

Відповідь: $f(x)=3x^4-18x^3+42x^2-48x+24$.

Задача № 43. Розв'язати рівняння $x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0.$

Розв'язання.

Розв'яжемо дане рівняння за формулами Кардано. Заміна $x = y + 3$ дає можливість занулити коефіцієнт біля квадрата змінної, тобто отримати зведене кубічне рівняння

$$y^3 - 9y + 28 = 0.$$

Обчислимо дискримінант одержаного рівняння

$$D = \left(\frac{28}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{3}\right)^3 = 169.$$

$D > 0,$ отже, зведене кубічне рівняння $y^3 - 9y + 28 = 0$ має один дійсний і два уявні корені. Дійсний корінь шукаємо у вигляді $y_1 = u_1 + v_1$, де

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} + \sqrt{169}} = -1; \; v_1 = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} - \sqrt{169}} = -3.$$

Тоді $y_1 = -1 + (-3) = -4.$

Решту коренів цього рівняння обчислюємо за формулами:

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = 2 + i\sqrt{3},$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = 2 - i\sqrt{3}.$$

З урахуванням підстановки $x = y + 3$ знаходимо корені даного рівняння:

$$x_1 = -4 + 3 = -1; \; x_{2,\,3} = 2 \pm i\sqrt{3} + 3 = 5 \pm i\sqrt{3}.$$

Відповідь: $-1, \; 5 \pm i\sqrt{3}.$

Задача № 44. Розв’язати рівняння $x^4 + x^3 + 6x^2 + 2x + 8 = 0$.

Розв’язання.

Застосуємо метод Феррарі. Спочатку переносимо в праву частину всі доданки, степінь яких не перевищує 2:

$$x^4 + x^3 = -6x^2 - 2x - 8.$$

Додаємо до обох частин $\frac{1}{4}x^2$ і отримуємо в лівій частині повний квадрат:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 = -\frac{23}{4}x^2 - 2x - 8.$$

Знову доповнюємо ліву частину одержаного рівняння до повного квадрата, ввівши параметр t:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 + 2t\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + t^2 = -\frac{23}{4}x^2 - 2x - 8 + 2t\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + t^2$$

або

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + t\right)^2 = \left(2t - \frac{23}{4}\right)x^2 + (t-2)x + t^2 - 8.$$

Виберемо t так, щоб квадратний тричлен відносно змінної x правої частини останнього рівняння був повним квадратом. Необхідною і достатньою умовою цього є рівність нулю дискримінанта квадратного тричлена $\left(2t - \frac{23}{4}\right)x^2 + (t-2)x + t^2 - 8$.

Звідки отримуємо рівняння

$$(t-2)^2 - 4\left(2t - \frac{23}{4}\right)(t^2 - 8) = 0$$

або

$$2t^3-6t^2-15t+45=0.$$

Знайдемо один із коренів останнього рівняння. Тоді

$$2t^2(t-3)-15(t-3)=0,$$

$$(t-3)(2t^2-15)=0.$$

Одним із коренів є $t_1=3$, а, отже, маємо

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x+3\right)^2=\frac{1}{4}x^2+x+1,$$

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x+3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2=0,$$

$$(x^2+2)(x^2+x+4)=0.$$

Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2=0, \\ x^2+x+4=0. \end{array}\right.$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$$x_{1,\,2}=\pm i\sqrt{2},\ \ x_{3,\,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}.$$

Відповідь: $\pm i\sqrt{2}$, $\dfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}$.

Задача № 45. Знайти раціональні корені многочлена

$$f(x)=24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6.$$

Розв'язання.

Нехай нескоротний дріб $\dfrac{p}{q}$ – корінь многочлена $f(x)$. Тоді p – дільник вільного члена 6, а q – дільник старшого коефіцієнта 24, а тому маємо $p\in\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, $q\in\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$,

$$\frac{p}{q}\in M=\left\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{3}{4}; \pm\frac{1}{6}; \pm\frac{1}{8}; \pm\frac{3}{8};\right.$$

$$\left.\pm\frac{1}{12}; \pm\frac{1}{24}\right\}.$$

Отже, якщо многочлен $f(x)$ має раціональні корені, то вони належать множині M.

Відомо, якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$, то $f(1) ⋮ (p-q)$ і $f(-1) ⋮ (p+q)$. У нашому випадку $f(1)=15$ і $f(-1)=-21$. Звідки, якщо $\frac{p}{q}$ – корінь $f(x)$, то $15 ⋮ (p-q)$ і $-21 ⋮ (p+q)$. Обидві умови задовольняють такі елементи множини M: $\pm 2; 6; \pm\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{6}$. За схемою Горнера перевіримо, які з цих чисел є коренями многочлена $f(x)$.

	24	10	–1	–19	–5	6
–2	24	–38	75	–169	333	–666
2	24	58	115	211	417	840
6	24	154	923	5519	33109	198660
$-\frac{1}{2}$	24	–2	0	–19	$\frac{9}{2}$	$\frac{15}{4}$
$\frac{1}{2}$	24	22	10	–14	–12	0

Отже, $\pm 2; 6; -\frac{1}{2}$ не є коренями многочлена $f(x)$, $\frac{1}{2}$ – корінь $f(x)$, звідки

$$f(x)=(2x-1)(12x^4+11x^3+5x^2-7x-6).$$

Далі шукаємо раціональні корені многочлена

$$f_1(x) = 12x^4 + 11x^3 + 5x^2 - 7x - 6$$

серед чисел $\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{6}$.

	12	11	5	–7	–6
$\frac{1}{2}$	12	17	$\frac{27}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{49}{8}$
$-\frac{3}{2}$	12	–7	$\frac{31}{2}$	$-\frac{121}{4}$	$\frac{315}{8}$
$-\frac{2}{3}$	12	3	3	–9	0

Одержали, що $-\frac{2}{3}$ є коренем многочлена $f_1(x)$, а $\frac{1}{2}$ і $-\frac{3}{2}$ коренями многочлена $f_1(x)$ не будуть.

Отже,

$$f_1(x) = (3x + 2)(4x^3 + x^2 + x - 3).$$

Звідки

$$f(x) = (2x - 1)(3x + 2)(4x^3 + x^2 + x - 3).$$

Залишається перевірити, які із чисел $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{6}$ є коренями многочлена

$$f_2(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3.$$

Зауважимо, що оскільки числа 3 і 6 не є дільниками старшого коефіцієнта 4 цього многочлена, то числа $-\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{6}$ не можуть бути його коренями. Тому для перевірки залишаються всього два числа $-\frac{1}{4}$ і $\frac{3}{4}$.

	4	1	1	–3
$-\frac{1}{4}$	4	0	1	$-\frac{13}{4}$
$\frac{3}{4}$	4	4	4	0

Звідки $\frac{3}{4}$ – корінь многочленів $f_2(x)$ і $f(x)$. А тому

$$f(x) = (2x-1)(3x+2)(4x-3)(x^2+x+1).$$

Рівняння $x^2+x+1=0$ раціональних коренів не має, а, отже, раціональні корені многочлена $f(x)$ вичерпуються числами: $\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Завдання для самостійної роботи

Побудувати многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами за даними коренями, який при діленні на двочлен $x-a$ дає остачу r:

6.2.1. Подвійний корінь –2, простий $-1+i$, $a=1, r=3$;

6.2.2. Прості корені 1, 2, $1+i$, $a=-1, r=12$;

6.2.3. Подвійний корінь 3, простий $2+i$, $a=2, r=24$;.

6.2.4. Прості корені $1-i,\ 2-i$, $a=-2, r=36$;.

6.2.5. Подвійний корінь 2, простий $-3+i$, $a=1, r=-24$;.

6.2.6. Подвійний корінь $-1+2i$, $a=3, r=72$;.

6.2.7. Прості корені $-1,\ 2,\ 1-2i$, $a=-3, r=120$;.

6.2.8. Подвійний корінь 4, простий $-2+i$, $a=2, r=-36$;.

6.2.9. Прості корені $-2,\ 5,\ 1-i$, $a=4, r=720;$.

6.2.10. Подвійний корінь $2-3i$, $a=5, r=24$.

Розв’язати рівняння:

6.2.11. а) $x^3+6x^2+30x+25=0$, б) $x^4+2x^3+x^2-1=0$;

6.2.12. а) $x^3+12x+63=0$, б) $x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$;

6.2.13. а) $x^3-3x^2-3x+11=0$, б) $x^4+6x^3+6x^2-8=0$;

6.2.14. а) $x^3+9x+26=0$, б) $x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0$;

6.2.15. а) $x^3+3x^2-6x+4=0$, б) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$;

6.2.16. а) $x^3+6x+2=0$, б) $x^4-6x^3+6x^2+27x-56=0$;

6.2.17. а) $x^3-6x^2+57x-196=0$, б) $x^4-3x^3+x^2+4x-6=0$;

6.2.18. а) $x^3+24x-56=0$, б) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$;

6.2.19. а) $x^3-3x^2-9x+27=0$, б) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$;

6.2.20. а) $x^3+45x-98=0$, б) $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0$.

Знайти раціональні корені многочлена:

6.2.21. $36x^5+72x^4+41x^3+19x^2-5x-3$;

6.2.22. $48x^5+20x^4+12x^3-5x^2-4x+1$;

6.2.23. $45x^5+42x^4+26x^3-15x^2-12x+4$;

6.2.24. $18x^5-15x^4-13x^3-26x^2+7x+5$;

6.2.25. $60x^5-79x^4+72x^3-10x^2-9x+2$;

6.2.26. $36x^5+24x^4+7x^3-8x^2-9x-2$;

6.2.27. $30x^5-49x^4+40x^3-6x^2-13x+4$;

6.2.28. $15x^5-8x^4+46x^3+21x^2-21x+3$;

6.2.29. $24x^5+82x^4+35x^3-36x^2-26x-4$;

6.2.30. $18x^5+33x^4-49x^3-6x^2+18x-4$.

6.3. Алгебраїчні розширення полів

Приклади розв’язань задач

Задача № 46. Позбавитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{4}-2}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$;   б) $\dfrac{1}{\alpha^2+2}$, де $\alpha^3+\alpha-2=0$.

Розв’язання.

а) Даний дріб є значенням раціонального дробу $\dfrac{h(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-2}{2x^2+x+1}$ при $x=\sqrt[3]{2}$. Число $\sqrt[3]{2}$ є коренем незвідного в полі Q многочлена $f(x)=x^3-2$, тому многочлен $f(x)$ є мінімальним многочленом для цього числа.

Знайдемо зображення найбільшого спільного дільника многочленів $f(x)$ і $g(x)$ через ці многочлени. Ділення многочленів виконаємо стовпчиком.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & -\;2 & 2x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-\;x^3 & +\;\frac{1}{2}x^2 & +\;\frac{1}{2}x & & \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ \cline{1-4}
 & -\frac{1}{2}x^2 & -\;\frac{1}{2}x & -\;2 & \\
 & -\;-\frac{1}{2}x^2 & -\;\frac{1}{4}x & -\;\frac{1}{4} & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{1}{4}x & -\;\frac{7}{4}=r_1(x) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & +\ x & +\ 1 & -\frac{1}{4}x-\frac{7}{4} \\
2x^2 & +\ 14x & & -8x+52 \\
\hline
 & -13x & +\ 1 & \\
 & -13x & -\ 91 & \\
\cline{2-3}
 & & 92=r_2(x)=d &
\end{array}
$$

$$92=g(x)+(8x-52)r_1(x)=g(x)+4(2x-13)r_1(x)\times$$

$$\times\left(f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)g(x)\right)=(8x-52)f(x)+(-4x^2+28x-12)g(x).$$

Отже, ми отримали зображення (f,g) через многочлени $f(x)$ і $g(x)$

$$92=(8x-52)f(x)+(-4x^2+28x-12)g(x).$$

Поклавши в останній рівності $x=\sqrt[3]{2}$, одержимо рівність

$$92=(8\sqrt[3]{2}-52)f(\sqrt[3]{2})+(-4\sqrt[3]{4}+28\sqrt[3]{2}-12)g(\sqrt[3]{2}),$$

звідки, враховуючи те, що $f(\sqrt[3]{2})=0,$ маємо:

$$\frac{1}{g(\sqrt[3]{2})}=\frac{-4\sqrt[3]{4}+28\sqrt[3]{2}-12}{92}=\frac{-\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{2}-3}{23}.$$

Отже,

$$\frac{\sqrt[3]{4}-2}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{(-\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{2}-3)(\sqrt[3]{4}-2)}{23}=\frac{-\sqrt[3]{4}-16\sqrt[3]{2}+20}{23}.$$

Відповідь: $\dfrac{-\sqrt[3]{4}-16\sqrt[3]{2}+20}{23}.$

б) За умовою задачі α – один із коренів рівняння $x^3+x-2=0$. Нехай $x_1=\alpha$, а x_2 і x_3 – решта коренів цього рівняння.

Тоді

$$\frac{1}{\alpha^2+2}=\frac{1}{x_1^2+2}=\frac{(x_2^2+2)(x_3^2+2)}{(x_1^2+2)(x_2^2+2)(x_3^2+2)}=$$

$$=\frac{x_2^2x_3^2+2(x_2^2+x_3^2)+4}{x_1^2x_2^2x_3^2+2(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+4(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+8}.$$

За теоремою Вієта $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=2$. Тому ${x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2=4$, $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3\times$ $\times(x_1+x_2+x_3)=1$, ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-2.$

Отже, $\dfrac{1}{x_1^2+2}=\dfrac{x_2^2x_3^2+2(x_2^2+x_3^2)+4}{6}$, причому x_2 і x_3 – корені рівняння $\dfrac{x^3+x-2}{x-x_1}=0$.

Виконаємо ділення многочлена x^3+x-2 на двочлен $x-x_1$ за схемою Горнера.

	1	0	1	–2
x_1	1	x_1	${x_1}^2+1$	0

Одержали, що x_2 і x_3– корені рівняння $x^2+x_1x+x_1^2+1=0$. Звідси $x_2+x_3=-x_1$, $x_2x_3=x_1^2+1$, $\dfrac{1}{x_1^2+2}=\dfrac{x_2^2x_3^2+2(x_2^2+x_3^2)+4}{6}=\dfrac{1}{6}(x_1^4+1)$.

Отже,

$$\frac{1}{\alpha^2+2}=\frac{1}{6}(\alpha^4+1).$$

Відповідь: $\dfrac{1}{6}(\alpha^4+1)$.

Завдання для самостійної роботи

Позбавитися від ірраціональності в знаменнику дробу:

6.3.1. $\dfrac{2\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{25}+4\sqrt[3]{5}+1}$;

6.3.2. $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$, $\alpha^3-2\alpha-2=0$;

6.3.3. $\dfrac{\sqrt[3]{2}-3}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$;

6.3.4. $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$, $\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+6$;

6.3.5. $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{25}+3\sqrt[3]{5}+1}$;

6.3.6. $\dfrac{1}{\alpha+2}$, $\alpha^4-3\alpha+6=0$;

6.3.7. $\dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4}$;

6.3.8. $\dfrac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\alpha^3+\alpha^2+3\alpha+1=0$;

6.3.9. $\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{1-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;

6.3.10. $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\alpha^3-3\alpha+1=0$;

6.3.11. $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$;

6.3.12. $\dfrac{\alpha}{\alpha+3}$, $\alpha^3-2\alpha+2=0$;

6.3.13. $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{3-\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{49}}$;

6.3.14. $\dfrac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$, $\alpha^2-3\alpha+5=0$;

6.3.15. $\dfrac{\sqrt[3]{2}-4}{2-\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}$;

6.3.16. $\dfrac{1}{\alpha^2+2}$, $\alpha^3-\alpha^2+3=0$;

6.3.17. $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{1+2\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}}$;

6.3.18. $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$, $\alpha^4+\alpha^2+1=0$;

6.3.19. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}}$;

6.3.20. $\dfrac{1}{\alpha-2}$, $\alpha^4+\alpha+1=0$.

ТАБЛИЦІ ІНДЕКСІВ ТА АНТИІНДЕКСІВ

Просте число 3. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2								

Просте число 5. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	3	2					

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	3						

Просте число 7. Первісний корінь 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	1	4	5	3			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	2	6	4	5				

Просте число 11. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	8	2	4	9	7	3	6
1	5									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6
1										

Просте число 13. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	4	2	9	5	11	3	8
1	10	7	6							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5
1	10	7								

Просте число 17. Первісний корінь 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	14	1	12	5	15	11	10	2
1	3	7	13	4	9	6	8			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14
1	8	7	4	12	2	6				

Просте число 19. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	13	2	16	14	6	3	8
1	17	12	15	5	7	11	4	10	9	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18
1	17	15	11	3	6	12	5	10		

Просте число 23. Первісний корінь 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	2	16	4	1	18	19	6	10
1	3	9	20	14	21	17	8	7	12	15
2	5	13	11							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	2	10	4	20	8	17	16	11
1	9	22	18	21	13	19	3	15	6	7
2	12	14								

Просте число 29. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	5	2	22	6	12	3	10
1	23	25	7	18	13	27	4	21	11	9
2	24	17	26	20	8	16	19	15	14	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	3	6	12	24	19
1	9	18	7	14	28	27	25	21	13	26
2	23	17	5	10	20	11	22	15		

Просте число 31. Первісний корінь 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	24	1	18	20	25	28	12	2
1	14	23	19	11	22	21	6	7	26	4
2	8	29	17	27	13	10	5	3	16	9
3	15									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	19	26	16	17	20	29
1	25	13	8	24	10	30	28	22	4	12
2	5	15	14	11	2	6	18	23	7	21

Просте число 37. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	26	2	23	27	32	3	16
1	24	30	28	11	33	13	4	7	17	35
2	25	22	31	15	29	10	12	6	34	21
3	14	9	5	20	8	19	18			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	27	17	14	31
1	25	13	26	15	30	23	9	18	36	35
2	33	29	21	5	10	20	3	6	12	24
3	11	22	7	14	28	19				

Просте число 41. Первісний корінь 6

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7

Просте число 43. Первісний корінь 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	27	1	12	25	28	35	39	2
1	10	30	13	32	20	26	24	38	29	19
2	37	36	15	16	40	8	17	3	5	41
3	11	34	9	31	23	18	14	7	4	33
4	22	6	21							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	38	28	41	37	25	32
1	10	30	4	12	36	22	23	26	35	19
2	14	42	40	34	16	5	15	2	6	18
3	11	33	13	39	31	7	21	20	17	8
4	24	29								

Просте число 47. Первісний корінь 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	18	20	36	1	38	32	8	40
1	19	7	10	11	4	21	26	16	12	45
2	37	6	25	5	28	2	29	14	22	35
3	39	3	44	27	34	33	30	42	17	31
4	6	15	24	13	43	41	23			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	31	14	23	21	11	8	40
1	12	13	18	43	27	41	17	38	2	10
2	3	15	28	46	42	22	16	33	24	26
3	36	39	7	35	34	29	4	20	6	30
4	9	45	37	44	32	19				

Просте число 53. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	17	2	47	18	14	3	34
1	48	6	19	24	15	12	4	10	35	37
2	49	31	7	39	20	42	25	51	16	46
3	13	33	5	23	11	9	36	30	38	41
4	50	45	32	22	8	29	40	44	21	28
5	43	27	26							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	11	22	44	35
1	17	34	15	30	7	14	28	3	6	12
2	24	48	43	33	13	26	52	51	49	45
3	37	21	42	31	9	18	36	19	38	23
4	46	39	25	50	47	41	29	5	10	20
5	40	27								

Просте число 59. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	50	2	6	51	18	3	42
1	7	25	52	45	19	56	4	40	43	38
2	8	10	26	15	53	12	46	34	20	28
3	57	49	5	17	41	24	44	55	39	37
4	9	14	11	33	27	48	16	23	54	36
5	13	32	47	22	35	31	21	30	29	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	5	10	20	40
1	21	42	25	50	41	23	46	33	7	14
2	28	56	53	47	35	11	22	44	29	58
3	57	55	51	43	27	54	49	39	19	38
4	17	34	9	18	36	13	26	52	45	31
5	3	6	12	24	48	37	15	30		

Просте число 61. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	6	2	22	7	49	3	12
1	23	15	8	40	50	28	4	47	13	26
2	24	55	16	57	9	44	41	18	51	35
3	29	59	5	21	48	11	14	39	27	46
4	25	54	56	43	17	34	58	20	10	38
5	45	53	42	33	19	37	52	32	36	31
6	30									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	3	6	12	24
1	48	35	9	18	36	11	22	44	27	54
2	47	33	5	10	20	40	19	38	15	30
3	60	59	57	53	45	29	58	55	49	37
4	13	26	52	43	25	50	39	17	34	7
5	14	28	56	51	41	21	42	23	46	31

Просте число 67. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	39	2	15	40	23	3	12
1	16	59	41	19	24	54	4	64	13	10
2	17	62	60	28	42	30	20	51	25	44
3	55	47	5	32	65	38	14	22	11	58
4	18	53	63	9	61	27	29	50	43	46
5	31	37	21	57	52	8	26	49	45	36
6	56	7	48	35	6	34	33			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	61	55	43
1	19	38	9	18	36	5	10	20	40	13
2	26	52	37	7	14	28	56	45	23	46
3	25	50	33	66	65	63	59	51	35	3
4	6	12	24	48	29	58	49	31	62	57
5	47	27	54	41	15	30	60	53	39	11
6	22	44	21	42	17	34				

Просте число 71. Первісний корінь 7

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	6	26	12	28	32	1	18	52
1	34	31	38	39	7	54	24	49	58	16
2	40	27	37	15	44	56	45	8	13	68
3	60	11	30	57	55	29	64	20	22	65
4	46	25	33	48	43	10	21	9	50	2
5	62	5	51	23	14	59	19	42	4	3
6	66	69	17	53	36	67	63	47	61	41
7	35									

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	7	49	59	58	51	2	14	27	47
1	45	31	4	28	54	23	19	62	8	56
2	37	46	38	53	16	41	3	21	5	35
3	32	11	6	42	10	70	64	22	12	13
4	20	69	57	44	24	26	40	67	43	17
5	48	52	9	63	15	34	25	33	18	55
6	30	68	50	66	36	39	60	65	29	61

Просте число 73. Первісний корінь 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	8	6	46	1	14	33	24	12
1	9	55	22	59	41	7	32	21	20	62
2	17	39	63	46	30	2	67	18	49	35
3	15	11	40	61	29	34	28	64	70	65
4	25	4	47	51	71	13	54	31	38	66
5	10	27	3	53	26	56	57	68	43	5
6	23	58	19	45	48	60	69	50	37	52
7	42	44	36							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	52	41	59	3	15	2	10
1	50	31	9	45	6	30	4	20	27	62
2	18	17	12	60	8	40	54	51	36	34
3	24	47	16	7	35	29	72	68	48	21
4	32	14	70	58	71	63	23	42	64	28
5	67	43	69	53	46	11	55	56	61	13
6	65	33	19	22	37	39	49	26	57	66
7	38	44								

Просте число 79. Первісний корінь 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	4	1	8	62	5	53	12	2
1	66	68	9	34	57	63	16	21	6	32
2	70	54	72	26	13	46	38	3	61	11
3	67	56	20	69	25	37	10	19	36	35
4	74	75	58	49	76	64	30	59	17	28
5	50	22	42	77	7	52	65	33	15	31
6	71	45	60	55	24	18	73	48	29	27
7	41	51	14	44	23	47	40	43	39	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	2	6	18	54	4	12
1	36	29	8	24	72	58	16	48	65	37
2	32	17	51	74	64	34	23	69	49	68
3	46	59	19	57	13	39	38	35	26	78
4	76	70	52	77	73	61	25	75	67	43
5	50	71	55	7	21	63	31	14	42	47
6	62	28	5	15	45	56	10	30	11	33
7	20	60	22	66	40	41	44	53		

Просте число 83. Первісний корінь 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	72	2	27	73	8	3	62
1	28	24	74	77	9	17	4	56	63	47
2	29	80	25	60	75	54	78	52	10	12
3	18	38	5	14	57	35	64	20	48	67
4	30	40	81	71	26	7	61	23	76	16
5	55	46	79	59	53	51	11	37	13	34
6	19	66	39	70	6	22	15	45	58	50
7	36	33	65	69	21	44	49	32	68	43
8	31	42	41							

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	45	7	14
1	28	56	29	58	33	66	49	15	30	60
2	37	74	65	47	11	22	44	5	10	20
3	40	80	77	71	59	35	70	57	31	62
4	41	82	81	79	75	67	51	19	38	76
5	69	55	27	54	25	50	17	34	68	53
6	23	46	9	18	36	72	61	39	78	73
7	63	43	3	6	12	24	48	13	26	52
8	21	42								

Просте число 89. Первісний корінь 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	16	1	32	70	17	81	48	2
1	86	84	33	23	9	71	64	6	18	35
2	14	82	12	57	49	52	39	3	25	59
3	87	31	80	85	22	63	34	11	51	24
4	30	21	10	29	28	72	73	54	65	74
5	68	7	55	78	19	66	41	36	75	43
6	15	69	47	83	8	5	13	56	38	58
7	79	62	50	20	27	53	67	77	40	42
8	46	4	37	61	26	76	45	60	44	

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	3	9	27	81	65	17	51	64	14
1	42	37	22	66	20	60	2	6	18	53
2	73	41	34	13	39	28	84	74	44	43
3	40	31	4	12	36	19	57	82	68	26
4	78	56	79	59	88	86	80	62	8	24
5	72	38	25	75	47	52	67	23	69	29
6	87	83	71	35	16	48	55	76	50	61
7	5	15	45	46	49	58	85	77	53	70
8	32	5	21	63	11	33	10	30		

Просте число 97. Первісний корінь 5

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	34	70	68	1	8	31	6	44
1	39	86	42	25	65	71	40	89	78	81
2	69	5	24	77	76	2	59	18	3	13
3	9	46	74	60	27	32	16	91	19	95
4	7	85	39	4	58	45	15	84	14	62
5	36	63	93	10	52	87	37	55	47	67
6	43	64	80	75	12	26	94	57	61	51
7	66	11	50	28	29	72	53	21	33	30
8	41	88	23	17	73	90	38	83	92	54
9	79	56	49	20	22	82	48			

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	5	25	28	43	21	8	40	6	30
1	53	71	64	29	48	46	36	83	27	38
2	93	77	94	82	22	13	65	34	73	74
3	79	7	35	78	2	10	50	56	86	42
4	16	80	12	60	9	45	31	58	96	92
5	72	69	54	76	89	57	91	67	44	26
6	33	68	49	51	61	14	70	59	4	20
7	3	15	75	84	32	63	24	23	18	90
8	62	19	95	87	47	41	11	55	81	17
9	85	37	88	52	66	39				

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і теорія чисел : Практикум / Завало С. Т., Левіщенко С. С. та ін. Ч. 2. Київ : Вища школа, 1986. 264 с.
2. Бородін О. І. Теорія чисел. Київ : Вища школа, 1970. 274 с.
3. Бухштаб А. А. Теория чисел. Москва : Просвещение, 1966. 384 с.
4. Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел. Ч. 2. Київ : Вища школа, 1976. 384 с.
5. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. Москва : Высшая школа, 1979. 559 с.
6. Математика. Тести. 5–12 класи: Посібник / Автори-укладачі: Лагно В. І., Москаленко О. А., Марченко В. О. та ін. Київ. : Академвидав, 2008. 320 с.
7. Москаленко Ю. Д., Марченко В. О., Редчук К. С. Використання тестових завдань як одного із засобів формування культури обчислень у школярів. *Математика в рідній школі*. 2017. № 3. С. 2-6.
8. Москаленко Ю. Д., Редчук К. С. Алгебра і теорія чисел : Тренувальні вправи та контрольні роботи для студентів 2 курсу напряму підготовки “Математика”. Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2009. 60 с.
9. Навчально-методичний посібник з алгебри і теорії чисел. Уклад. Горбачук О. Л., Комарницький М. Я., Матурін Ю. П. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2006. 106 с.
10. Требенко Д. Я., Требенко О. О. Алгебра і теорія чисел. Ч. 1. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. 420 с.

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

МОСКАЛЕНКО Юрій Дмитрович

КОВАЛЕНКО Олена Володимирівна

ЧЕРКАСЬКА Любов Петрівна

Алгебра і теорія чисел

Методичні рекомендації до проведення
практичних занять та організації самостійної роботи
студентів предметної спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)

Відповідальний за випуск *Ю. Д. Москаленко*
Комп'ютерний набір та верстка *О. В. Коваленко*