Оператори умовної симетрії для нелінійного рівняння реакції – дифузії

Тетяна Баранник

Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г.Короленка

Розглядається таке рівняння:

$$u_t = \Delta u + f(u) \qquad (1)$$

де $u = u(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$

$f(n)$ - деяка фіксована функція від незалежної змінної u.

Під класичною симетрію [1] рівняння (1) ми розуміємо існування групи перевірених перетворень для залежних і незалежних змінних, що зберігають його форму. Умовна симетрія [2] означає існування такої групи при умові, що u задовольняє і деяка додаткове рівняння. Оскільки рівняння (1) симетричне відносно групи обертань $O(n)$, то рівняння (1) редукується до рівняння:

$$u_t - u_{xx} - \frac{n-1}{x} u_x = f(n) \qquad (2)$$

Оператор умовної симетрії даного рівняння шукаємо у вигляді:

$$X = \frac{\partial}{dt} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + (-\pi u + \omega) \frac{\partial}{\partial u},$$

де

$$\xi = \xi(t;x),$$
$$\pi = \pi(t;x),$$
$$\omega = \omega(t;x).$$

Цей оператор є генератором умовної симетрії рівняння (2), якщо це рівняння сумісне з умовою $Xu = 0$.

Нехай

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \pi,$$
$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{n-1}{x} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Функції ξ, π будемо визначити з умови:

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \qquad (3)$$

де Λ, φ, θ - функції від t і x.

У результаті нескладних обчислень комутатора $[Q, L]$, який допускає зображення (3), одержимо наступну систему рівнянь для визначення функцій $\Lambda, \varphi, \theta, \xi, \pi$:

$$2\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\Lambda, \Lambda + \theta = 0$$

$$\xi \frac{n-1}{x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{n-1}{x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \theta \xi - \frac{n-1}{x} \Lambda$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{n-1}{x} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial x} = \theta \pi + \varphi .$$

Доведемо таке твердження. Оператор

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+\xi\frac{\partial}{\partial x}-\pi u\frac{\partial}{\partial u}$$

є оператором умовної симетрії рівняння (2) у випадку $f(u)=\pm u^k+C_2u$.

Якщо $\pi(x)=-\frac{2\xi x}{1-k}$, а функція $\xi=\xi(x)$ є розв'язком системи:

$$\begin{cases}\frac{n-1}{x}\xi+\xi^2+\frac{3+k}{1-k}\xi_x=C_1\\ \frac{n-1}{x}\xi_{xx}+\xi_{xxx}-2\xi_x{}^2+C_2(1-k)\xi_x=0\end{cases}.$$

Нехай $n=5, f(u)=-u^{1/3}$. Тоді рівняння (2) має вигляд:

$$u_t-u_{xx}-\frac{u}{x}u_x=-u^{1/3} \tag{4}$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії:

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u},$$

якому відповідає підстановки: $u=\frac{1}{x^3}\omega(z),\ z=\frac{x^2}{2}-t,$

що редукує рівняння (4) до рівняння:

$$\omega''-\omega^{1/3}=0. \tag{5}$$

Рівняння (5) є рівняння Емдена-Фаулера і його частинний розв'язок має вигляд: $\omega=\frac{\sqrt{6}}{36}z^3$. Тому знаходимо розв'язок рівняння (4):

$$u=\frac{\sqrt{6}}{36}\left(\frac{(x_1{}^2+...+x_5{}^2)^{3/2}}{8}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}(x_1{}^2+...+x_5{}^2)^{1/2}t+\frac{3}{2}\frac{t^2}{(x_1{}^2+...+x_5{}^2)^{1/2}}-\frac{t^3}{(x_1{}^2+...+x_5{}^2)^{3/2}}\right)$$

Нехай $n=3,\ f(u)=\pm u^{-1}$. Тоді маємо рівняння

$$u_t-u_{xx}-\frac{2}{x}u_x=\pm u^{-1} \tag{6}$$

це рівняння допускає оператор умовної симетрії

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\left(k'-\frac{1}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Якщо $k'=0$, то підстановка $u=\frac{1}{x}\omega(z),\ z=\frac{x^2}{2}+t$

редукує рівняння (6) до рівняння $\omega''\pm\omega^{-1}=0$б загальний розв'язок якого буде $z=\int\left(\pm2\ln\omega+C_1\right)^{-u_2}d\omega+C_2$

Таким чином, встановлено, що для нелінійного рівняння реакції – дифузії існують оператори умовної симетрії, при чому ці оператори знайдені у явному виді. А це в свою чергу дало можливість побудувати нові точки розв'язки.

Література

1. Овсянников Л.В. Груповой аналіз дифференциальніх. – М: Наука, 1978. – 400 с.

2. Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр.мат.журн.- 1991. №11. – с.1456 – 1470.