Ю. Г. Подошвелев
Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка
м. Полтава
optimist1618@outlook.com

NQR-МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як відомо, функціональні рівняння є потужним інструментом для математичного опису та аналізу складних систем у різних наукових дисциплінах.

Розглянемо одне з таких функціональних рівнянь:

$$f(G(x, y)) = F(f(x), f(y), f(x-y); x, y), \ \forall x, y \in D, \tag{1}$$

де f – шукана функція; F, G – відомі функції двох змінних, а D – задана множина. Рівняння (1) узагальнює широку групу класичних функціональних рівнянь. Наприклад, при $G(x, y) = x + y$, а $F(a,b,c,x,y) = a+b$ або $F(a,b,c,x,y) = a \cdot b$ – отримуємо перше та друге рівняння Коші [1, 2, 3]:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(x+y) &= f(x) + f(y). \end{aligned} \tag{2}$$

Відмітимо, що NQR-метод пошуку розв'язків функціональних рівнянь в елементарних функціях – це узагальнення аналітичного підходу, який вперше було застосовано при розв'язуванні рівнянь (2) [1]. Суть NQR-методу полягає в послідовному розширенні області пошуку розв'язку функціонального рівняння $x \in \mathbb{N} \to x \in \mathbb{Q} \to x \in \mathbb{R}$ при реконструюванні шуканої функції. Проілюструємо на прикладі покрокове застосування цього методу при розв'язуванні рівняння (1). Із метою прослідковування ідей Коші покладемо в рівнянні (1) $G(x, y) = x + y$, матимемо:

$$f(x+y) = F(f(x), f(y), f(x-y); x, y). \tag{3}$$

На першому кроці підставимо в (3) $x = y = 0$, отримаємо рівняння на $f(0)$:

$$f(0) = F(f(0), f(0), f(0); 0, 0),$$

з якого знаходимо значення функції f при $x = 0$.

Далі у рівнянні (3) послідовно змінюємо x на $2x, 3x, \ldots, (n-1)x$ та $y = x$:

$$\begin{aligned} &f(2x) = F(f(x), f(x), f(0); x, x) \equiv F_2(f(x), x), \\ &f(3x) = F(f(2x), f(x), f(x); 2x, x) \equiv F_3(f(x), x), \\ &f(4x) = F(f(3x), f(x), f(2x); 3x, x) \equiv F_4(f(x), x), \\ &\vdots \\ &f(nx) = F(f((n-1)x), f(x), f((n-2)x); (n-1)x, x) \equiv F_n(f(x), x). \end{aligned}$$

У більш загальному випадку заміни, що здійснені на цьому кроці, можуть бути іншими, оскільки залежать від вигляду функції $G(x, y)$.

Тепер в останнє рівняння підставимо $x = \dfrac{my}{n}$:

$$f(my) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n}\right), \frac{m}{n} y \right).$$

Перепишемо ліву частину, використавши попередні результати:

$$F_m(f(y), y) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n} y\right), \frac{m}{n} y \right).$$

Із останньої рівності явно визначаємо функцію $f\left(\frac{m}{n}y\right)$ (припускаємо, що це можливо), тоді матимемо рівність:

$$f\left(\frac{m}{n}y\right)=\mathcal{F}\left(f(y),\, y;\frac{m}{n}\right),$$

із деякою функцією $\mathcal{F}(a,y,x)$. Звідки при $y=1$ та $\frac{m}{n}=q$:

$$f(q)=\mathcal{F}(f(1),1;q)\,,\ \forall q\in \mathrm{Q}_{+}. \qquad (4)$$

Нехай x – будь-яке невід'ємне дійсне число. Тоді існує послідовність невід'ємних раціональних чисел $\{q_n\}$, яка збігається до x. Припускаючи неперервність функцій f і $\mathcal{F}$, рівність (4) набирає вигляду:

$$f(x)=\mathcal{F}(f(1),1,x)\,,\ \forall x\in \mathbb{R}_{+}.$$

Щоб знайти функцію $f(x)$ при $x<0$, скористаємося рівнянням (3). Зокрема, покладаючи у (3) $y=-x$, знайдемо:

$$f(0)=F(f(x),f(-x),f(2x),x,-x)=F(f(x),\mathcal{F}(f(1),1,-x),F_2(f(x),x),x,-x).$$

Із останньої рівності визначаємо $f(x)$, щоб знайти кінцевий результат:

$$f(x)=\mathcal{G}(x),\ x<0.$$

Отже, функціональне рівняння (1) при неперервності функцій f і $\mathcal{F}$ можна розв'язати NQR-методом, правильно обравши в залежності від вигляду функції $G(x,y)$ базовий елемент та крок для індукційних перетворень вихідного рівняння.

Література

1. Alexiewicz A., Orlicz W. Remarque sur l'equation fonctionelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$, Fund. Math. 33 1945. 314–315.
2. Kuczma, M. An Introduction to the Theory of functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. Birkhauser, Basel. 2009. 595 p. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8749-5
3. Федак І. В. Функціональні рівняння : навчальний посібник. (Видання друге). Івано-Франківськ : ПНУ, 2018. 144 с.

Анотація. Подошвелев Ю. Г. NQR-метод розв'язування функціональних рівнянь. *У даній статті наведено покрокове обґрунтування* NQR-*методу пошуку розв'язків функціональних рівнянь, на прикладі рівняння*

$$f(G(x,y))=F(f(x),f(y),f(x-y);x,y),\ \ \forall x,y\in D,$$

що є узагальненням широкої групи класичних функціональних рівнянь. Встановлено, що для даного функціональне рівняння можливе застосування NQR-методу, у разі неперервності функції f .

Ключові слова: NQR-*метод, функціональне рівняння, неперервна функція, розв'язок, рівняння Коші.*

Summary. Podoshvelev Yurii. NQR-method for solving functional equations. *This article provides a step-by-step justification of the* NQR-*method for finding solutions to functional equations, using the example of the equation*

$$f(G(x,y))=F(f(x),f(y),f(x-y);x,y),\ \ \forall x,y\in D,$$

which is a generalization of a wide group of classical functional equations. It has been established that for this functional equation it is possible to use the NQR-*method, in the case of continuity of the function* f .

Key words: *NQR-method, functional equation, continuous function, solution, Cauchy equation.*