

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В.Г.КОРОЛЕНКА

В.А.Ржеко, М.П.Красницький

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Частина I

Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині

Полтава 2004

УДК 514.123

Ржеко В.А., Красницький М.П.

Аналітична геометрія. Частина I: елементи векторної алгебри; метод координат на площині.- Полтава: ПДПУ, 2004.- 68 с.

Рецензенти: В.І.Лагно – доктор фізико-математичних наук, доцент;
М.Є.Зюков – кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальний редактор:
В.О.Марченко – кандидат фізико-математичних наук, доцент

Ухвалено до друку вченою радою Полтавського державного педагогічного університету імені В.Г.Короленка. Протокол № 3 від 28 жовтня 2004 року

Навчальний посібник містить понад 300 задач з аналітичної геометрії на площині, розв'язування яких має на меті забезпечити формування відповідних знань і вмінь студентів, визначених програмою для фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Крім того до нього вміщено приклади розв'язування окремих типів задач, довідковий матеріал та зміст двох контрольних робіт.

Даний посібник стане в нагоді викладачам, студентам різних форм навчання й учителям.

Передмова

Курс аналітичної геометрії входить до фундаментальних частин вищої геометрії. Його основне освітнє завдання – сформулювати в студентів уміння, пов’язані з використанням векторного і координатного методів розв’язування математичних задач. Саме векторний і координатний методи – одні з небагатьох універсальних методів, що дають можливість побудувати систематизований курс геометрії на основі аксіоматичного підходу, моделювати й досліджувати фізичні явища і процеси тощо. Тому мета даного збірника й полягає в забезпеченні навчального процесу задачним матеріалом для оволодіння студентами відповідним програмовим змістом.

Пропонований збірник орієнтований на програму з аналітичної геометрії для педагогічних вищих навчальних закладів. Представлені в ньому понад 300 задач для самостійного розв’язування згруповано згідно основних розділів програми. Крім того до нього включено завдання двох контрольних робіт, кожна з яких складається із десяти варіантів по п’ять задач у кожному. Контрольним роботам передують зразки розв’язування окремих типів задач. До збірника увійшли чимало теорем шкільного курсу геометрії, які пропонується довести векторним або (і) координатним методами, що, на нашу думку, має сприяти формуванню наукового світогляду майбутніх учителів.

Таким чином даний збірник можна використовувати для аудиторних та домашніх завдань студентів як стаціонару так і заочного відділення. Зауважимо, що студенти денної форми навчання виконують дві планові аудиторні контрольні роботи, студенти ж заочного відділення виконують одну домашню контрольну роботу, зміст якої складають задачі представлених у збірнику обох контрольних робіт.

Збірник задач з аналітичної геометрії буде корисний не лише студентам фізико-математичних факультетів, а й вчителям, студентам інших спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів, які вивчають вищу математику.

1. Елементи векторної алгебри

1.1. Додавання та віднімання векторів.

Множення вектора на число

1. Знайти суму та різницю векторів, якщо: 1) \vec{a} не колінеарний \vec{b} ; 2) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$; 3) $\vec{a} \downarrow \vec{b}$.
 2. $ABCD$ – чотирикутник. Доведіть, що $\vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{CD}$.
 3. На площині взято точки A, B, C, E, F . Чи правильно, що $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = \vec{EF} + \vec{ED} + \vec{CB}$?
 4. $ABCE$ – чотирикутник. Доведіть, що $\vec{AC} + \vec{BE} = \vec{AB} + \vec{CE}$.
 5. $ABCD$ – тетраедр. Доведіть, що $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{BD} + \vec{AC}$. Чи справедливо це твердження для чотирьох довільних точок?
 6. Хорди AB і CD кола з центром O взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці M . Доведіть, що $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OM}$.
 7. $ABCD$ – паралелограм. Доведіть, що $\vec{AC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.
 8. За яких умов для ненульових векторів \vec{a} та \vec{b} можливі рівності:
 - 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$
 - 2) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$
 - 3) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$
 - 4) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$
 - 5) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.
9. Доведіть, що медіана трикутника менша за півсуму сторін, які виходять із нею з однієї вершини.
10. Доведіть, що середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

11. M і N – середини сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$, причому. Доведіть, що сторони BC і AD паралельні між собою.
12. У п'ятикутнику $ABCDE$ точки M, N, P, Q , – середини сторін AB, CD, BC, DE відповідно. K, Z – середини відрізків MN та PQ . Доведіть, що прямі AE та KZ паралельні і \perp .
13. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, якщо M – центр трикутника ABC з довільними сторонами.
14. Сторони BC, CA, AB трикутника ABC розділено по його обходу відповідно точками L, M та N у рівних відношеннях. Доведіть, що з відрізків AL, BM та CN можна скласти трикутник.
15. Дано $\triangle ABC$ і довільну точку O простору. M – точка перетину медіан трикутника. Доведіть, що $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
16. Доведіть, що для двох неколінеарних векторів \vec{a} та \vec{b} , які виходять з однієї точки, вектор $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ – колінеарний бісектрисі кута, утвореного векторами \vec{a} та \vec{b} , а вектор $|\vec{b}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{b}$ – колінеарний бісектрисі суміжного з ним кута.
17. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть суму векторів:
а) \vec{a} ; б) \vec{b} ; в) \vec{c} .
18. Абсолютні величини векторів \vec{a} і \vec{b} дорівнюють 4 і 9. Що можна стверджувати про абсолютну величину суми $\vec{a} + \vec{b}$?
19. У трапеції $ABCD$ основи AD та BC мають відповідні довжини a та b ($a > b$). Побудуйте напрямлений відрізок, який задає вектор: а) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Обчисліть довжину кожного з цих векторів.
20. У $\triangle ABC$ проведено медіану AM . Доведіть, що $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$.
21. Доведіть, що $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$.
22. O – центр паралелограма $ABCD$. Доведіть, що $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

23. M – Точка сторони BC $\triangle ABC$. Чи правильно, що $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{BM}$?
24. Абсолютні величини векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} рівні. Чи правильно, що вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ паралельний бісектрисі кута BAC ?
25. Дано тетраедр $ABCD$. Знайдіть суму векторів: 1); 2); 3).
26. Дано паралелепіпед. Знайдіть суму векторів: 1); 2); 3); 4) $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C_1C}$.
27. Доведіть, що точки O, A, B належать одній прямій, то чотирикутник $OACB$ – паралелограм
28. Точка O не належить площині $\triangle ABC$. Відкладіть від точки O вектори: 1) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$; 2) ; 3).
29. Коли справджуються такі рівності: а) б) в) $2\vec{a} = 5\vec{a}$?
30. Якщо в $\triangle ABC$ M – точка перетину медіан, то . Доведіть.
31. Доведіть властивість середньої лінії трикутника.

1.2. Лінійна комбінація векторів.

Лінійна залежність векторів. Координати вектора

32. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарні вектори. З'ясувати, чи колінеарні вектори:
а) та ;
б) $\vec{p}_1 = \vec{a} - 2\sqrt{2}\vec{b} + \sqrt{6}\vec{c}$ та $\vec{p}_2 = \sqrt{2}\vec{a} - 4\vec{b} + 2\sqrt{3}\vec{c}$.
33. Дано вектори \vec{a} та \vec{b} . Дано скалярні коефіцієнти n та p . Скалярні коефіцієнти m та p .
34. Дано три неколінеарні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = \vec{e}_3$. $\overrightarrow{AB_1} = \alpha \vec{e}_1$ ($\forall \alpha \in R$) Дано вектори \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CD} та \overrightarrow{BA} . Знайти $\overrightarrow{B_1D_1}$.

35. Точка M – центр тяжіння $\triangle ABC$. Розікласти: 1) за векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} вектори \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{BM} , \overrightarrow{CM} ; 2) \overrightarrow{MA} за векторами \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} ; 3) \overrightarrow{AB} за векторами \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} ; 4) \overrightarrow{OA} за векторами \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OM} , де O – довільна точка простору.
36. Дано паралелограм $ABCD$. $O = AC \cap DB$. M – середина BC . Знайти координати векторів \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OM} у базисі $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.
37. Точка M – центр тяжіння $\triangle ABC$. Знайти координати векторів \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AM} у базисі $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$.
38. У ромбі $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$ взято за базисні. Знайти координати векторів \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} та \overrightarrow{DA} у цьому базисі.
39. У трапеції $ABCD$. Точки M та N – середини основ AB та DC відповідно. Знайти:
- 1) координати векторів \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{PB} у базисі $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$;
 - 2) розклад векторів \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} за базисом $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$.
40. У рівнобічній трапеції $ABCD$ $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $AB = a$, $AD = b$, $AB \parallel DC$. Розікласти вектори \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} та \overrightarrow{BD} за базисом $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
41. Дано піраміду $SABCD$ з основою $ABCD$ та висотою SO . M – середина AD , N – середина BC . Знайти координати векторів \overrightarrow{SM} , \overrightarrow{SN} у базисі $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC})$.
42. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. M – середина AD , $(BC, P) = 2$, $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC})$ – базис. Знайти координати векторів \overrightarrow{SD} , \overrightarrow{SM} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{SP} , \overrightarrow{AP} .
43. Відносно базису (\vec{e}_1, \vec{e}_2) вектор \vec{a} має координати $(2; 1)$. Знайти координати вектора \vec{a} відносно базису \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 , якщо
- 1) $\vec{e}_1 = 4\vec{e}'_1$; $\vec{e}_2 = -\frac{2}{3}\vec{e}'_2$;
 - 2) $\vec{e}_1 = 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2$; $\vec{e}_2 = \vec{e}'_1 + 3\vec{e}'_2$.
44. Вектори $\vec{a}(m, 1, n)$ та $\vec{b}(1, 2, 3)$ колінеарні. Визначити m та n .
45. Дані вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ відносно деякого базису. Поділити вектор \vec{d} як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

46. Серед векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{m}, \vec{n}, \vec{o}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{t}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, заданих відносно базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, вказати вектори:

1) колінеарні \vec{e}_2 ; 2) компланарні з \vec{e}_2, \vec{e}_3 .

47. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – неколінеарні вектори. З'ясувати, чи колінеарні вектори:

а) $\vec{p}_1 = 7\vec{a}$ та \vec{b} ;

б) \vec{a} та \vec{c} ?

48. Дано вектори \vec{a}, \vec{b} та \vec{c} . Знайти вектор \vec{r} , який є сумою векторів \vec{a} та \vec{b} , і перпендикулярний до вектора \vec{c} .

49. Нехай $ABCD$ – паралелограм. E, F – середини протилежних сторін BC та AD , O – точка перетину діагоналей. Взявши вектори $\vec{AB} = \vec{e}_1, \vec{AD} = \vec{e}_2$ за базисні, знайти у даному базисі координати векторів $\vec{AC}, \vec{OD}, \vec{FC}, \vec{BC}, \vec{EO}, \vec{BD}, \vec{EA}$.

50. Розв'язати попередню задачу, якщо $\vec{e}_1 = \vec{AF}, \vec{e}_2 = \vec{OD}$.

51. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ вектори $\vec{AB} = \vec{e}_1, \vec{AE} = \vec{e}_2$ взято за базисні. Знайти у даному базисі координати векторів $\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AF}, \vec{EF}$.

52. У $\triangle ABC$ проведено медіану BK та середню лінію MN ($MN \parallel AC$). Знайти:

а) координати векторів $\vec{CM}, \vec{OB}, \vec{KM}, \vec{CB}, \vec{NC}, \vec{AN}$ у базисі (\vec{OC}, \vec{OM}) ;

б) координати тих же векторів у базисі (\vec{KC}, \vec{KN}) ;

53. У загальній декартовій системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ побудувати вектори $\vec{a}_1(1, 2), \vec{a}_2(2, -1), \vec{a}_3(0, -1)$.

54. Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайти координати векторів $\vec{AA_1}, \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}, \vec{EC_1}, \vec{B_1C_1}, \vec{FG}, \vec{CD}, \vec{CB_1}, \vec{AG}$.

55. У тетраедрі $SABC$, точки A_1, B_1, C_1 – відповідно середини ребер SA, SB, SC . O та O' – точки перетину медіан трикутників ABC

та $A'B'C'$ ($\overline{AA_1}$, \overline{AD} , \overline{AB}) – базис. Знайти координати векторів \overline{CB} , \overline{AC} , $\overline{CA'}$, $\overline{O'A}$, \overline{AS} , $\overline{AC'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{AE'}$, де E' – середина $\overline{A'C'}$.

56. Відносно базису (\vec{e}_1, \vec{e}_2) вектор \vec{a} має координати $(3; -1)$. Визначити координати вектора \vec{a} відносно базису (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) , якщо $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

57. Площина векторів $\vec{a}(4; -2)$, $\vec{b}(3; 5)$ відносно базису (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Площина векторів \vec{c} жінку базису \vec{a}, \vec{b} .

58. Визначити k , якщо вектори $\vec{a}(k; 1)$ та \vec{b} колінеарні.

59. Дані вектори $\vec{m}(t; 2)$, $\vec{n}(1; -1)$, $\vec{b}(5; 1)$. Визначити, якщо вектори \vec{a} та \vec{b} колінеарні.

60. Дані вектори \vec{a}, \vec{b} . Знайти вектор $\overline{AB} + \overline{CD}$ якщо \overline{MK} якщо \vec{a}, \vec{b} – взаємно перпендикулярні.

61. При яких значеннях x та y вектори \vec{a} і \vec{b} , зв'язані співвідношенням $(2x+y-3)\vec{a} + (2x-y-1)\vec{b} = \vec{\theta}$, неколінеарні?

62. У площині трикутника ABC взято довільну точку O . Точки M_1, M_2, M_3 – середини сторін трикутника ABC . Довести, що рівнодійна сил $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ дорівнює рівнодійній сил.

1.3. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

63. Знайти \vec{a}, \vec{b} , якщо $a = 2, b = 3$.

64. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах: \vec{a}, \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$.

65. При якому значенні n вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ та \vec{d} перпендикулярні?

66. Визначити кут між векторами \vec{a}, \vec{b} та \vec{c} .

67. Обчислити $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = \vec{b} + 5\vec{c}$, $|\vec{b}| = 1$; $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.
68. Обчислити довжини діагоналей паралелограма $ABCD$, побудовано на векторах \vec{a} та \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$.
69. Дано три взаємно перпендикулярні промені OA , OB , OC . Визначити кут між бісектрисами кутів AOB та BOC .
70. Трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$, вписано в одиничне коло з центром у точці O . Обчислити скалярні добутки: 1) $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$; 2) $\vec{OC} \cdot \vec{OA}$; 3) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.
71. $ABCDEF$ – правильний шестикутник з центром O і стороною a . Обчислити скалярні добутки: 1) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$; 2) $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$; 3) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$; 4) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$; 5) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$; 6) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$; 7) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
72. \vec{OA} і \vec{OB} – неколінеарні одиничні вектори. Знайти скалярний добуток $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OB})$.
73. Доведіть, що діагоналі ромба перпендикулярні.
74. Доведіть теорему косинусів.
75. Доведіть теорему Піфагора та теорему обернену до неї.
76. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма рівна сумі квадратів усіх його сторін.
77. Доведіть, що довжина медіани трикутника виражається через довжини його сторін за формулою: $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.
78. Знайти рівнодійну трьох сил по $10H$ кожна, якщо сили прикладені до однієї точки і кут між ними 90° , 60° , 60° .

2. Метод координат на площині

2.1. Системи координат на площині

79. За координатами трьох вершин P , Q , R паралелограма обчислити координати четвертої його вершини:
- 1) $P(1;4)$, $Q(3;-1)$, $R(0;2)$;
 - 2) $P(-1;0)$, $Q(2;1)$, $R(4;-2)$.
80. Довести, що три точки A , B , C лежать на одній прямій:
- 1) $A(2;1)$, $B(0;5)$, $C(4;-3)$;
 - 2) $A(-1;0)$, $B(1;-2)$, $C(3;-4)$.
81. Точки K і L – середини сторін BC і CD відповідно паралелограма $ABCD$. Знайти координати вершин паралелограма в репері (A, K, L) .
82. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Знайти координати його вершин і центра O , якщо за початок взято точку A , а за координатні вектори, відповідно вектори \overline{AB} та \overline{AS} , де S – точка відрізка AE така, що $AS = AB$.
83. Чотирикутник задано координатами вершин: $A(-1;7)$, $B(5;5)$, $C(7;-5)$, $D(3;-7)$. Довести, що :
- 1) відрізки, які сполучають середини сторін AD і BC , AB і CD , перетинаються і точкою перетину діляться пополам;
 - 2) чотирикутник, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника, – паралелограм.
84. Дві вершини $\triangle ABC$ задано координатами $A(3;6)$, $B(-3;5)$. Визначити координати вершини C за умови, що середини сторін AC і BC лежать на різних осях координат.
85. Дано координати вершин $\triangle ABC$: $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$. Знайти довжину бісектриси AD кута A .
86. Знайти довжину медіани AM $\triangle ABC$, якщо $A(5;-4)$, $B(-1;2)$, $C(-6;7)$.
87. Користуючись теоремою, оберненою до теореми Піфагора, переконатися в тому, що $\triangle ABC$, заданий координатами вершин $A(1;1)$, $B(2;5)$, $C(-6;7)$ – прямокутний. Визначити вершину прямого кута.
88. За координатами двох вершин рівностороннього трикутника ABC знайти координати його третьої вершини:
- 1) $A(1;1)$, $B(2;-1)$;
 - 2) $A(0;0)$, $B(-2;1)$.

89. Знайти координати вершин рівностороннього трикутника ABC за координатами його вершини A та центра тяжіння G , якщо:

1) $A(2;0), G(1;-\frac{1}{2})$;

2) $A(-2;1), G(0;1)$.

90. Дано $\triangle ABC: A(3;3), B(-2;3), C(0;-2)$. Знайти координати основ бісектрис кутів цього трикутника.

91. Використовуючи класифікацію трикутників за кутами, з'ясувати вид трикутника, якщо відомі координати його вершин:

1) $A(1;1), B(3;-1), C(7;3)$;

2) $A(4;0), B(1;1), C(5;4)$;

3) $A(2;1), B(3;2), C(6;3)$.

92. За координатами вершин A і C квадрата $ABCD$ знайти координати вершин B і D якщо:

1) $A(1;1), C(-2;1)$;

2) $A(-1;0), C(3;2)$.

93. У репері (O, \vec{i}, \vec{j}) побудувати фігури задані умовами:

1) $|x|=1$;

2) $|x|=|y|$;

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9; \\ x \geq 0; \\ y \leq 0; \end{cases}$

3) $x=|x-y|$;

4) $y=|x-1|$;

9) $|x| = |y|$;

5) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$;

6) $|x| = |y|$;

10) $|x| = |y|$;

7) $\begin{cases} |x| < 2; \\ |y| < 3; \end{cases}$

11) $|x| < 2; |y| < 3$;

94. Знайти множину точок площини, сума квадратів відстаней кожної з яких до вершин даного квадрата зі стороною $2a$ – стала й дорівнює b^2 .
95. Знайти множину точок площини, сума квадратів відстаней кожної з яких до вершин даного прямокутника дорівнює квадрату довжини заданого відрізка.
96. Знайти множину точок площини, сума квадратів відстаней кожної з яких до кінців однієї діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів відстаней до кінців його другої діагоналі.
97. Скласти рівняння множини центрів тяжіння трикутників, які мають рівні вершини, а вершини кожного з них лежать на одній з осей прямокутної системи координат.
98. Через точку $P(6, -8)$ проведені промені до перетину з віссю OX декартової прямокутної системи координат. Скласти геометричне місце середин відрізків цих променів.
99. Знайти геометричне місце точок середин хорд кола $x^2 + y^2 = 25$, довжини яких дорівнюють 8.
100. Відносно репера дано координати точок $O(2; -3), A'(1; 1), A''(3; -6)$. Знайти:
- 1) формули переходу від репера R до репера R' ;
 - 2) координати точки $M(5; -1)$ у репері R' .
101. Дано паралелограм $ABCD$. У системі координат $(A, \overline{AB}, \overline{AD})$ точка M має координати $(\alpha; \beta)$. Визначити координати цієї точки в репері: 1) $(C, \overline{CB}, \overline{CD})$; 2) $(A, \overline{AB}, \overline{AD})$; 3) $(D, \overline{DB}, \overline{DC})$.
102. В репері $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ задана фігура Φ рівнянням $2x^2 + 4x + y - 1 = 0$ і точка $O'(-1; 1)$. Знайти рівняння фігури Φ в репері $R' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$, де $\angle(\vec{i}, \vec{i}') = \frac{\pi}{4}$.

105. У системі координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ множини точок задано рівнянням $4x^2 - y^2 - 4xy + 4x + 6y - 8 = 0$. Знайти рівняння цієї ж множини в репері $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$, якщо $O' \left(\frac{1}{2}; 2 \right)$, $\vec{e}'_1 \left(\frac{1}{2}; 0 \right)$, $\vec{e}'_2 \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.

106. Дано формули перетворення координат від репера (O, \vec{i}, \vec{j}) до $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$. Визначити, в яких із вказаних нижче випадків новий репер $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ є ортонормованим:

1) 3)

4)

107. У полярній системі координат побудувати точки $M_1 \left(2; \frac{\pi}{3} \right)$,

$M_2 \left(1; \frac{5\pi}{3} \right)$, $M_4 \left(3; \frac{\pi}{4} \right)$, $M_5 \left(4; \frac{2\pi}{3} \right)$.

108. Побудувати точки, задані узагальненими полярними координатами: $A_1 \left(-5; \frac{\pi}{2} \right)$, $A_3(-3; 0)$, $A_4 \left(2; \frac{3\pi}{4} \right)$.

109. Сторона правильного трикутника ABC дорівнює a . Вважаючи вершину A полюсом полярної системи координат, а пряму AB – полярною віссю, визначити полярні координати вершин і центра P трикутника. Розглянути усі можливі випадки розташування трикутника відносно полярної вісі.

110. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, сторона якого дорівнює a . Вважаючи точку A полюсом, а пряму AB – полярною віссю, визначити координати всіх вершин і точки P перетину діагоналей. Розглянути всі можливі випадки розташування шестикутника відносно полярної вісі.

111. (O, \vec{i}) – задана полярна система координат, (O, \vec{i}, \vec{j}) – прямокутна декартова система, причому вектор \vec{j} одержано з вектора \vec{i} поворотом на кут $+90^\circ$. Визначити:

- 1) декартові координати точок за їх полярними координатами: $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$.
- 2) полярні координати точок за їх декартовими координатами:
 $M(0;6)$, $N(-2;0)$, $K(-1;1)$, $L(\sqrt{3};1)$, $P(0;-3)$, $R(1;-\sqrt{3})$
112. Вивести формулу відстані між двома точками $M_1(\rho_1; \varphi_1)$ та $M_2(\rho_2; \varphi_2)$, заданими полярними координатами. Користуючись цією формулою знайти відстань між точками: 1) $A\left(5; \frac{\pi}{6}\right)$ та $B\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $C\left(4; \frac{11\pi}{18}\right)$ та $D\left(3; \frac{\pi}{9}\right)$; 3) $E\left(4; \frac{\pi}{5}\right)$ та $F\left(6; -\frac{6\pi}{5}\right)$.
113. Визначити множини точок, координати яких у неузгаальненій полярній системі координат задані рівняннями: 1) $\rho=3$; 2) $\rho=5$; 3) $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 4) $\varphi=\frac{2\pi}{3}$; 5) $\rho \cos \varphi=5$; 6) $\rho \sin \varphi=3$.
114. Визначити множини точок, координати яких в узгаальненій полярній системі координат задані рівняннями: 1) $\rho=4$; 2) $\rho \cos \varphi=5$; 3) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 4) $\sin \varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\rho=10 \sin \varphi$; 6)
115. У репері (O, \vec{i}, \vec{j}) задано рівняння множин точок: 1) $x-3y=0$; 2) $y+5=0$; 3) $x^2+y^2=16$; 4) $xy=10$; 5) $x^2-y^2=a$ 6) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$. Знайти рівняння цих множин точок в узгаальненій полярній системі координат (O, \vec{i}) .
116. Знайти рівняння кола радіуса r в полярній системі координат, полюс якої лежить на колі, а полярна вісь проходить через центр кола.

2.2. Пряма лінія

117. Написати рівняння прямої, яка:

- 1) проходить через точки $A(-1;1)$, $B(2;5)$;
 2) проходить через точку $A(2;-6)$ паралельно вектору $\vec{a} (5;3)$;
 3) відтинає на осях координат відрізки $a=3$, $b=-2$;
 4) проходить через точку $A(1;-5)$ паралельно прямій $x-3y+2=0$.
118. Написати рівняння сторін і медіан трикутника ABC , якщо $A(-1;3)$, $B(5;3)$, $C(2;7)$.
119. Вершини трикутника задані координатами $A(1;-2)$, $B(0;3)$, $C(1;1)$. Знайти рівняння прямих, які проходять через кожен із них паралельно протилежній стороні.
120. Дано дві суміжні вершини паралелограма $ABCD$ $A(1;-2)$, $B(3;2)$ і точка $P(1;1)$ – точка перетину його діагоналей. Знайти рівняння сторін паралелограма.
121. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x-y+1=0$ та $x-2y=0$, точку перетину його діагоналей $P(3;1)$. Знайти рівняння двох інших сторін паралелограма.
122. Відомі рівняння прямих $4x-5y=0$, $x-3y=0$, які містять медіани $\triangle ABC$, та вершина $A(2;-5)$. Знайти рівняння сторін $\triangle ABC$.
123. Скласти рівняння сторін BC та AC за даними координатами вершин A , B і центра тяжіння D трикутника ABC :
 1) $A(2;1)$, $B(-3;0)$, $D(0;1)$; 2) $A(-1;0)$, $B(2;1)$, $D(3;2)$.
124. На площині задано точку $P(3;2)$ і прями $a: 3x-2y+2=0$, $b: 3x+5y-12=0$. Знайти рівняння прямої c , яка проходить через точку P , якщо P – середина відрізка AB .
125. Написати рівняння прямої, яка:
 1) проходить через точку $A(2;5)$ і має кутовий коефіцієнт $k=3$;
 2) проходить через точку $B(1;2)$ і утворює з віссю Ox кут 120° ;
 3) відтинає від осі Oy відрізок $b=2$ і має кутовий коефіцієнт $k=5$;
 4) проходить через точку $A(-1;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(2;1)$;
 5) проходить через точку $B(5;10)$ перпендикулярно до прямої $2x-3y+1=0$.
126. Дано рівняння руху точки M : $x=3+4t$, $y=-3t$. Визначити:
 1) швидкість точки M ;

- 2) координати точки M у момент часу $t=3$;
 3) момент часу, в який точка M досягне прямої $x+2y+7=0$.
127. Точка $M(3;2)$ є основою перпендикуляра, опущеного з точки $M(1;-1)$ на пряму l . Знайти рівняння прямої l .
128. Скласти рівняння серединного перпендикуляра відрізка AB , якщо $A(2;-3)$, $B(6;-5)$.
129. На прямій $x-2y+1=0$ знайти точку рівновіддалену від точок $A(-2;5)$ та $B(0;1)$.
130. Дано вершини трикутника $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(3;2)$. Знайти рівняння висот трикутника.
131. Дано дві вершини трикутника $A(-1;5)$, $B(3;2)$ та точку $H(5;-3)$ перетину його висот. Скласти рівняння його сторін.
132. Знайти проекцію точки M на пряму l , якщо:
- 1) $M(5;-2)$, $l: 2x-3y-3=0$;
 - 2) $M(3;3)$, $l: x+y-6=0$;
 - 3) $M(0;8)$, $l: 3x-y-2=0$.
133. Визначити координати точки, симетричної точці A відносно прямої a , якщо:
- 1) $A(2;-5)$, $a: 2x+8y-15=0$;
 - 2) $A(1;4)$, $a: x-y-5=0$.
134. На прямій $2x-y-10=0$ знайти точку A , сума відстаней якої до точок $B(-5;0)$ та $C(-3;4)$ була б найменшою.
135. Написати рівняння бісектрис внутрішніх кутів трикутника ABC , якщо $A(3;2)$, $B(7;5)$; $C(3;8)$.
136. Знайти координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $x+3y+12=0$, $x+3y-8=0$ та рівняння однієї з його діагоналей $2x+y+4=0$.
137. Висоти трикутника ABC перетинаються в точці H . Написати рівняння прямих BC і AC якщо $AB: 4x+y-12=0$, $AH: 2x+2y-9=0$, $BH: 5x-4y-15=0$.
138. Дослідити розташування прямих відносно осей координат:
- 1) $2x-3y=0$;
 - 2) $3x-y+1=0$;
 - 3) $5x-1=0$;
 - 4) $3y+1=0$;
 - 5) $x+2y=0$;
 - 6) $6y=0$.
139. При яких значеннях параметра t прямі, задані рівняннями $3tx-8y+1=0$ та $(1+t)x-2ty=0$, паралельні.
140. Чи можна підібрати коефіцієнти x та y так, щоб прямі $3x-2y+1=0$ та $3x-2y+1=0$ збігалися?

141. Дано дві точки $A(2;-1)$, $B(3;1)$. З'ясувати, чи перетинає відрізок AB пряму m , задану рівнянням:
 1) $x+3y-5=0$; 2) $3x-y+1=0$?
142. Дано дві прямі $3x+y=0$ та $2x-3y+1=0$ і точку $M(-2;1)$. Знайти аналітичні умови, які визначають кут, утворений даними прямими, що містить точку M .
143. З'ясувати, чи є чотирикутник $ABCD$ опуклим, якщо:
 1) $A(3;1)$, $B(-2;4)$, $C(-1;0)$, $D(3;-1)$;
 2) $A(2;1)$, $B(-3;0)$, $C(4;-2)$, $D(-1;-1)$.
144. Записати аналітичні умови, які визначають смугу, утворену прямими:
 1) $3x+y-1=0$ та $6x+2y+3=0$; 2) $x+2y+2=0$ та $2x+4y-7=0$.
145. Знайти аналітичні умови, які визначають $\triangle ABC$, якщо:
 1) $A(0;1)$, $B(-2;4)$, $C(3;-1)$; 2) $A(3;1)$, $B(2;-1)$, $C(0;2)$.
146. Зобразити область, задану системою нерівностей:

1)

2)

147. Знайти відстані від точок $A(1;2)$, $B(-1;0)$, $C(1;6)$ до прямої $3x-4y+1=0$.
148. Знайти довжини висот трикутника, сторони якого лежать на прямих $y-2=0$, $2x-y-12=0$, $4x-11y+30=0$.
149. Написати рівняння кола з центром у точці $P(6;-3)$, яке дотикається до прямої $3x-4y-15=0$.
150. Написати рівняння кола, яке концентричне з колом $x^2+y^2-4x+6y-17=0$ і дотикається до прямої $3x-4y+7=0$.
151. Через точку $M(-1;4)$ проведено пряму, віддалену від точки $Q(-2;-1)$ на 5 од. Скласти її рівняння.
152. Через точку $P(1;1)$ провести дотичні до кола, яке має центр у точці $A(1;-3)$ і радіус $2\sqrt{2}$.
153. Знайти рівняння дотичних до кола $(x-1)^2+(y+3)^2=40$, які:
 1) перпендикулярні до прямої $3x+y-4=0$;
 2) паралельні прямій $3x+4y+1=0$.
154. Скласти рівняння прямих, віддалених від прямої $4x-3y-7=0$ на відстань, рівну 3.

155. Знайти геометричне місце точок площини, рівновіддалених від двох паралельних прямих:
 1) $2x-5y+6=0$ і $2x-5y-8=0$; 2) $3x+5y+8=0$ і $3x+5y+2=0$.
156. Знайти геометричні місця точок площини, рівновіддалених від сторін кутів утворених прямими:
 1) $x-3y+2=0$ і $3x+y-1=0$; 2) $x+2y+5=0$ і $4x-2y-3=0$.
157. Визначити кут між прямими:
 1) $3x+y-6=0$ і $2x-y+5=0$;
 2) $|i|$.
158. Через точку $A(-1;5)$ провести пряму, які нахилені до прямої $x-y+3=0$ під кутом, тангенс якого дорівнює $\frac{3}{5}$.
159. Знайти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $3x-y+5=0$ та вершину прямого кута $C(4;-1)$.
160. Дано рівняння однієї із сторін квадрата $x+3y-3=0$ і точку перетину його діагоналей $(-2;0)$. Скласти рівняння діагоналей і решти сторін.
161. Дано вершину $A(2;-5)$ квадрата $ABCD$ і рівняння діагоналі BD : $3x-y+6=0$. Скласти рівняння прямих, які містять сторони квадрата.
162. Промінь світла поширюється вздовж прямої $x+y+3=0$. Дійшовши до прямої $3x-y+5=0$, він відбився. Знайти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.
163. Із точки $M(1;-2)$ до прямої m : $x+y-1=0$, падає промінь світла під кутом α ($\operatorname{tg}\alpha = 3$). Знайти рівняння прямих, на яких лежать падаючий і відбитий промені.
164. Знайти рівняння сторін трикутника ABC , якщо відомо рівняння двох його бісектрис $x+2y-13=0$, $x-y-5=0$ та координати вершини $A(7;8)$.
165. Знайти рівняння сторін трикутника ABC , якщо відома його вершина $A(3;0)$ і рівняння двох медіан $7x-5y+15=0$ та $4x+y+6=0$.
166. Довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

167. Довести, що середини основ довільної трапеції, точка перетину продовжень її бічних сторін та точка перетину діагоналей лежать на одній прямій.
168. Довести, що центр S описаного кола, ортоцентр H та центр тяжіння G довільного трикутника, лежать на одній прямій.
169. Дано рівняння двох сторін прямокутника $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$ і рівняння його діагоналі $3x+7y-10=0$. Скласти рівняння інших сторін і другої діагоналі цього прямокутника.
170. У квадраті з однієї вершини проведені дві прямі, які поділяють протилежні сторони квадрата пополам. Знайти кут між ними.

2.3. Лінії другого порядку

2.3.1. Еліпс

171. Знайти рівняння геометричного місця точок площини, для кожної з яких сума відстаней від двох точок $F_1(4;0)$ та $F_2(-4;0)$ дорівнює 10.
172. Знайти довжини півосей і координати фокусів еліпсів:
 1) $4x^2+9y^2-36=0$; 2) $x^2+y^2=9$.
 Зобразити лінії на координатній площині.
173. Визначити ексцентриситет і рівняння директрис еліпсів:
 1) $4x^2+144y^2-576=0$; 2) $9x^2+5y^2-45=0$.
174. Довжина більшої півосі еліпса дорівнює 6. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а відстань точки M еліпса до фокуса F_1 дорівнює 7. Обчислити відстань від точки M до фокуса F_2 та координати точки M . Написати канонічне рівняння еліпса.
175. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:
 1) фокальна відстань $2c=10$, а мала піввісь $b=5$;
 2) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, велика піввісь $a=6$;

3) еліпс проходить через точки $M_1(1;3)$, $M_2(4;1)$;

4) відстань між директрисами дорівнює $4\sqrt{5}$, а $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) прямі $x = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$ є директрисами еліпса, а мала піввісь дорівнює 2.

176. Знайти відстань від кінців більшої вісі еліпса до однієї із директрис.

177. Написати канонічні рівняння еліпсів, які задані в полярній системі координат рівняннями, за полюс прийнято фокус F_1 , а за полярну вісь – напрямлену пряму F_1F_2 :

1) ; 2) .

178. Написати рівняння еліпсів у полярній системі координат, спосіб вибору якої задано в попередній задачі:

1) ; 2) .

179. На прямій, заданій рівнянням $x+5y+4=0$, знайти точку, сума відстаней якої до точок $A(-3;0)$ та $B(5;0)$ дорівнює 10.

180. Задано пряму $l: 4x+3y+6=0$ та точку $F(-1;3)$, які є директрисою та відповідним фокусом еліпса. Написати рівняння другої директриси і знайти координати відповідного їй фокуса, якщо більша піввісь еліпса $a=6$.

181. Точки $A(2;2)$ та $C(4;6)$ є протилежними вершинами еліпса. Визначити координати двох інших вершин B і D та фокусів еліпса, якщо вісь $BD = 4\sqrt{5}$. Відп. $(B(-1;6), D(7;2), F_1(0), F_2(0))$

182. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2;1)$, містить хорду еліпса $4x^2+9y^2-36=0$, що ділиться точкою A пополам.

183. Знайти фігуру, яка складається з усіх точок площини, що ділять у даному відношенні $\lambda (\lambda \neq 1)$ паралельні хорди кола.

184. Скласти рівняння кола з центром на прямій $x-y=0$, яке дотикається до прямих $x-2y-7=0$ та $x-2y+5=0$.

185. На еліпсі $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{30} = 1$ знайти точку, відстань від якої до малої осі дорівнює 5.

186. Вершина трикутника, який має нерухому основу, переміщується так, що його периметр не змінюється. Написати рівняння траєкторії вершини трикутника, якщо основа дорівнює 24, а периметр – 50.

2.3.2. Гіпербола

187. Написати рівняння геометричного місця точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней від точок $F_1(-4;0)$ та $F_2(4;0)$ дорівнює 6.

188. Знайти довжини півосей і координати фокусів гіпербол:

1) $25x^2 - 16y^2 - 1 = 0$; 2) $10x^2 - 2y^2 - 10 = 0$.

Зобразити лінії на координатній площині.

189. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між вершинами дорівнює 8, а між фокусами – 10;

2) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

3) гіпербола має асимптоти $4y \pm 3x = 0$ та директриси $5x \pm 16 = 0$;

4) гіпербола є рівнобічною і проходить через точку $(\sqrt{2}; 1)$;

5) кут між асимптотами становить 60° і гіпербола проходить через точку $M(4\sqrt{2}; 3)$.

190. Довести, що відрізок асимптоти, який міститься між центром гіперболи і директрисою, дорівнює дійсній піввісі. Користуючись цією властивістю побудувати директриси таких гіпербол:

1) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$;

191. Довести, що директриси гіперболи проходять через основи перпендикулярів, опущених із відповідних фокусів гіперболи до асимптот.

192. На гіперболі знайти точку, фокальні радіуси якої взаємно перпендикулярні.

193. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо дано її рівняння в полярних координатах: .
194. Знайти координати точок перетину асимптот з директрисами гіперболи:
195. Дано відрізок AB , довжина якого $2a$. Знайти фігуру $F = \left\{ M \mid \angle MAB - \angle MBA = \frac{\pi}{2} \right\}$.
196. Знайти координати фокусів гіперболи, якщо відстань між фокусами становить $2\sqrt{10}$, асимптоти задані рівняннями $x+2y+4=0$, $2x-y+2=0$ і одна з гілок гіперболи розташована в тому з кутів між асимптотами, де знаходиться початок координат.
197. Написати рівняння прямої, яка проходить через фокус $F(a\sqrt{2}; 0)$ гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ і утворює в перетині з нею хорду, яка ділиться точкою A у відношенні $\lambda = 2$.
198. Знайти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом, якщо її е
199. Знайти довжину відрізка асимптот гіперболи, обмеженою прямою асимптотиз директриси
200. Знайти рівняння гіперболи, яка проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ і має фокуси в його вершинах. Зобразити гіперболу на координатній площині.
201. Точка M рухається так, що під час руху залишається вдвічі ближче до точки $A(1,0)$ ніж до точки $B(4,0)$. Знайти рівняння її траєкторії.

2.3.3. Парабола

202. Написати рівняння параболи в репері (O, \vec{i}, \vec{j}) , якщо в цьому репері задані фокус $F(4;2)$ та рівняння директриси $x+3y-6=0$.
203. На прямій $8x-3y+6=0$ знайти точку, яка рівновіддалена від прямої $x-5=0$ та від точки $A(-3;2)$.
204. Визначити координати фокуса P , скласти рівняння директриси для кожної з парабол і зобразити лінії:
 1) $y^2=6x$; 3) $y^2=-2x$; 5) $2x^2-3y=0$;
 2) $x^2=-4y$; 4) $x^2=3y$; 6) $3y^2+16x=0$.
205. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:
 1) фокус має координати $(3;0)$;
 2) фокус має координати $(0;5)$;
 3) директриса має рівняння $x+15=0$;
 4) директриса має рівняння $y+12=0$;
 5) парабола симетрична відносно вісі Ox і проходить через точку $M(1;2)$;
 6) парабола симетрична відносно вісі Oy і проходить через точку $M(5;1)$.
206. Знайти фокальний радіус FM точки M параболи $y^2=8x$, якщо її абсциса дорівнює 8.
207. На параболі $x^2=-12y$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 9.
208. Під гострим кутом до горизонту кинуто камінь, який, рухаючись по параболі, упав на відстані 24 м від початкового положення. Визначити параметр траєкторії, якщо найбільша висота, досягнута каменем – 6 м.
209. Канат підвісного мосту має форму параболи. Написати її рівняння, вибравши систему координат, якщо прогин канату дорівнює a , а довжина прольоту – $2b$.
210. Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболи навколо її вісі. Діаметр дзеркала – 80 см, його глибина – 10 см. На якій відстані від вершини параболи треба помістити джерело світла, щоб промені відображалися паралельним пучком?
211. Знайти довжину сторони правильного трикутника, вписаного в параболу з параметром p , якщо одна вершина трикутника збігається з вершиною параболи.

212. Знайти довжини сторін трикутника, вписаного в параболу з параметром p , якщо одна вершина збігається з вершиною параболу, а ортоцентр – з фокусом.
213. Знайти напрями хорд параболу $y^2=8x$, які діаметром $y=4$ діляться пополам.
214. Пряма $x-3y+9=0$ дотикається до параболу $y^2=2px$. Знайти p .
215. Знайти відстань між параболою $y^2=64x$ та прямою $4x+3y+46=0$.
216. Скласти канонічне рівняння параболу, яка в полярних координатах має рівняння:
1) ; 2) .
217. Написати рівняння парабол у полярних координатах, якщо полюс збігається з їх фокусами, а полярна вісь – з віссю Ox .
218. Знайти висоту арки моста завдовжки 24 м, яка має форму параболу .

2.4. Загальне рівняння лінії другого порядку

2.4.1. Дотична до кривої

219. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ в точці $A(\sqrt{5}; 2)$. Відповідь: $\sqrt{5}x - 2y - 2 = 0$.
220. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, які проходять через точку $C(10; -8)$.
221. Знайти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, які паралельні прямій $x+y-4=0$.

222. Довести оптичну властивість еліпса: будь-яка дотична до еліпса утворює рівні кути з фокальними радіусами точки дотику.
223. Довести, що добуток відстаней від фокусів еліпса до будь-якої його дотичної дорівнює квадрату малої піввісі.
224. Скласти рівняння дотичних до гіперболи в точці $(5;1)$.
225. Написати рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{12} - y^2 = 1$, які утворюють з віссю Ox кути $\pm 30^\circ$.
226. Довести, що відрізок будь-якої дотичної до гіперболи, обмежений асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.
227. Довести оптичну властивість гіперболи: дотична до гіперболи в довільній точці M є бісектрисою кута $\angle F_1MF_2$, де F_1, F_2 – фокуси гіперболи.
228. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2=8x$ у точці $(2;-4)$.
229. Написати рівняння прямої, яка має кутовий коефіцієнт $k \neq 0$ і дотикається до параболи $y^2=2px$.
230. Знайти найкоротшу відстань від точок параболи $y^2=12x$ до прямої $x-y+7=0$. Відповідь: $2\sqrt{2}$.
231. Знайти множину основ перпендикулярів, опущених із фокуса параболи на всі її дотичні.
232. Через точку $(1;0)$ провести дотичні до кривої $3x^2 + 7xy + 5y^2 - 2x - 2y = 0$.
233. Через початок координат провести дотичні до кривої $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 6y + 16 = 0$.
234. До кривої $x^2-6xy+9y^2-12x+4y+20$ провести дотичні, які паралельні прямій $x-2y+7=0$.
235. Знайти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, перпендикулярних до прямої $3x+10y=0$.

2.4.2. Асимптотичні напрями

236. Знайти вектор асимптотичного напрямку для кривих другого порядку:

1)

$$4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0;$$

2)

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0;$$

3)

$$x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0;$$

4)

;

5)

;

6)

$$4x^2 - 3xy - y^2 - x - 2y + 1 = 0.$$

237. Використовуючи поняття асимптотичних напрямів, показати, що крива $x^2 - x + y = 0$ не є еліпсом і не є гіперболою, а крива $xy + x + 1 = 0$ не є параболою і не є еліпсом.

2.4.3. Діаметр і центр кривої

238. Для кривої $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2y = 0$ визначити діаметри, спряжені векторам:

1) $\vec{p}_1 (1;2)$; 2) $\vec{p}_2 (4;-3)$; 3) $\vec{p}_3 (2;3)$.

239. Для кривої $4x^2 - 6xy + y^2 - 8x + 1 = 0$ визначити діаметр, який проходить через точку $(0;1)$.

240. Знайти центр для кожної з наступних кривих:

1) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;

2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;

3) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$;

4) $3x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x - 2y + 5 = 0$;

5) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;

6) :

241. Знайти спільний діаметр двох кривих $4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y = 0$ та $x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 7 = 0$.

242. Знайти рівняння діаметра лінії $3x^2 - 5xy + y^2 + 8x = 0$, який ділить навпіл її хорди з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{2}{3}$.

243. Написати рівняння діаметра лінії $6x^2 - 9xy + 13y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$, який проходить через точку $K(1; -2)$.

244. Знайти довжину діаметра кривої, який ділить кут між осями навпіл.

2.4.4. Спряжені напрями. Спряжені діаметри

245. Дано криву $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$. Визначити вектори, спряжені векторам $\vec{p}_1 (1; 1)$; $\vec{p}_2 (2; 3)$; $\vec{p}_3 (-1; 1)$; $\vec{p}_4 (2; 0)$.

246. Знайти напрями хорд, спряжених діаметру $2x + y - 3 = 0$ відносно кривої $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$.

247. Написати рівняння двох спряжених діаметрів кривої $xy - y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$, один із яких паралельний вісі Oy .

248. Скласти рівняння двох спряжених діаметрів кривої $x^2 - 6xy + 2y^2 - 6x - 7 = 0$, один із яких паралельний прямій $x - 4y + 5 = 0$.

249. Знайти два спряжені діаметри кривої $x^2 - 8xy - 6x - 2y + 5 = 0$, один із яких проходить через точку $(-1; -2)$.

250. Знайти рівняння і довжини двох спряжених діаметрів еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, один із яких проходить через точку $(3; 1)$.

251. Скласти рівняння двох спряжених діаметрів гіперболи, кут між якими -45° .

252. Написати рівняння діаметра параболи $y^2=4x$, який проходить через середину хорди, яку відтинає парабола на прямій $4x+3y-12=0$.

2.4.5. Головні напрями. Головні діаметри

253. Знайти головні напрями кривих другого порядку:

1) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$;

2) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

3) ;

4) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$;

5) $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + y = 0$.

254. Визначити вісі ліній другого порядку, заданих у попередній задачі.

2.4.6. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного виду

255. Звести рівняння лінії другого порядку до канонічного виду. Зобразити їх на координатній площині:

1) ;

2) $9x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y = 0$;

3) $23x^2 + 72xy + 2y^2 + 25 = 0$;

4) $4x^2 - 4xy + 4y^2 - 15 = 0$;

5) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16 = 0$;

- 6) $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0$;
 7) $x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0$;
 8) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
 9) $x^2 - \frac{1}{4}y^2 - x - \frac{2}{3}y - 1 = 0$;
 10) $x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 23 = 0$;
 11) ;
 12) $x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$;
 13) $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0$;
 14) $9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0$;
 15) $9x^2 + 16y^2 - 24xy + 30x - 40y - 25 = 0$.

2.5. Перетворення площини

2.5.1. Відображення. Перетворення

256. На площині дано пучок прямих $P(S)$ із центром S і прямою d , яка не проходить через центр S . Довести, що відображення $f: d \rightarrow P(S)$ за законом $\forall M \in d | f(M) = SM \in P(S)$ є ін'єктивним, але не сюр'єктивним.
257. Нехай l – бісектриса пари вертикальних кутів, утворених прямими $l_1, l_2, l_1 \cap l_2 = O$. Довести відображення $f: M \in d | f(M) = SM \in P(S)$ є ін'єктивним, але не сюр'єктивним.
258. Навести приклади відображень: 1) сюр'єктивних, але не ін'єктивних; 2) ін'єктивних, але не сюр'єктивних; 3) бієктивних.
259. Навести приклади перетворення кола: 1) яке не має інваріантних точок; 2) яке має дві інваріантні точки.

260. Навести приклади перетворення площини, які мають:
1) одну інваріантну точку; 2) інваріантні прямі; 3) пряму інваріантних точок та інваріантні прямі.
261. Довести, що існує бієктивне відображення f фігури на пряму AB .
262. На площині дано відкривий круг. Довести, що існує бієктивне відображення $f: \Phi \rightarrow \pi$.
263. На площині дано коло $\gamma = (O, r)$ та ΔABC . Довести, що існує бієктивне відображення f кола γ на ламану ABC .
264. На площині дано два відрізки AB та CD . Довести, що існує бієктивне відображення f відрізка AB на відрізок CD .
265. На площині дано півколо γ та відрізок AB . Довести, що існує бієктивне відображення півкола γ на відрізок AB .

2.5.2. Рухи площини

266. Дано пряму ℓ та дві точки A і B які лежать з одного боку від прямої ℓ . Довести, що на прямій, існує єдина точка M_0 така, що $AM_0 + M_0B < AM + MB$, де M – довільна точка прямої ℓ , відмінна від M_0 .
267. Дано пряму ℓ та дві точки A і B , які лежать по різні боки від прямої ℓ . Чи існує на прямій ℓ така точка M_0 , що $|AM_0 - M_0B| < |AM - MB|$, де M – довільна точка прямої ℓ , відмінна від точки M_0 .
268. Довести, що з усіх рівновеликих трикутників із спільною основою, рівнобедрений трикутник має найменший периметр.
269. У даний кут ABC вписати трикутник найменшого периметра так, щоб одна з його вершин була в даній внутрішній точці M кута.
270. Написати формули осьової симетрії площини за координатами двох симетричних точок $A(1; -2)$, $B(3; 4)$.
271. Написати формули осьової симетрії площини, якщо відомо рівняння вісі симетрії $\ell: x + y + 4 = 0$.

272. Написати рівняння прямої m' , симетричної прямій m відносно ℓ , якщо:

1) $\ell: x + y + 1 = 0$, $m: 2x - y - 2 = 0$;

2) $\ell: -x + y = 0$, $m: x - 2y + 1 = 0$.

273. Дано дві паралельні прямі a , b і точку C , яка не лежить на жодній з них. Довести, що на прямій a та на прямій b знайдуться відповідно такі точки A і B , що трикутник ABC буде рівностороннім.

274. На прямій дано три точки A , B , C , такі, що B лежить між A і C . З одного боку від прямої побудовано рівносторонні трикутники AMB та BNC . Доведіть, що середини відрізків MC , NA та точка B є вершинами правильного трикутника.

275. Два мотоциклісти рухаються двома прямолінійними шосейними дорогами, між якими розміщений населений пункт. Обидва вони повинні зупинитися на своєму шляху так, щоб кожний з них побачив другого і радіощоглу в населеному пункті під одним і тим самим кутом. Визначити місце зупинки кожного з мотоциклістів.

276. На сторонах AB та AC $\triangle ABC$ зовні трикутника побудовано два квадрати $ABMN$ та $ACPR$. Довести, що $NR \perp AD$, де AD медіана $\triangle ABC$.

277. Написати координатне задання повороту з центром у точці C на кут φ :

1) $C_1(0; 0)$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$; 2) $C_2(-1; 3)$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$; 3) $C_3(2; -1)$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$.

278. Обчислити координати центра повороту, заданого формулами:

279. Дано два кола, що перетинаються в точках P та Q . Доведіть, що існує єдиний відрізок AB з кінцями на цих колах, для якого P є серединою.

280. Доведіть, що трикутник, у якого дві медіани рівні, є рівнобедреним.

281. Доведіть, що трапеція, у якої дві діагоналі рівні, є рівнобедреною.
282. Записати координатне задання ковзної симетрії з віссю ℓ і вектором паралельного перенесення \vec{a} , якщо:
- 1) $\ell_1: 2x - y + 1 = 0, \vec{a}_1 (2; 4);$
 - 2) $\ell_2: x - 3y - 6 = 0, \vec{a}_2 (3; 1).$
283. Знайти координати точки, симетричної точці $A(4; -8)$ відносно прямої, яка проходить через точки $M(-3; 2)$ і $N(3; -1)$.

2.5.3. Перетворення подібності

284. Побудувати центр гомотетії, якщо задано: а) два відповідні відрізки; б) два відповідні кола.
285. На прямій задано дві пари точок A і B, A_1 та B_1 . Побудувати центр гомотетії, яка точку A відображає в точку A_1 , а точку B – в точку B_1 .
286. У трикутнику $A'B'C'$ дані координати вершин: $A'(-3; 1), B'(1; -3), C'(1; -3)$. Побудувати трикутник ABC , який подібний до $A'B'C'$.
287. Два квадрати мають спільний центр, а їх сторони відповідно паралельні. Якими гомотетіями можна один із квадратів відобразити в інший?
288. Довести, що одне з двох нерівних кіл може бути переведено в інше двома різними гомотетіями, сума коефіцієнтів яких рівна нулю.
289. У репері $(0; \vec{i}; \vec{j})$ дано координати вершин: $A(0; -3), B(4; 0), C(1; -1), B'(0; -2)$. Довести, що трикутники подібні. Знайти формули подібності.

290. Написати формули перетворення подібності першого роду, при якому $A(1; 2) \rightarrow A_1(2; 0)$, $B(-2; 3) \rightarrow B_1(4; 0)$. Обчислити координати інваріантної точки і знайти коефіцієнт подібності.
291. Довести, що середини основ трапеції, точка перетину продовжень бічних сторін та точка перетину її діагоналей лежать на одній прямій.
292. Довести, що пряма, яка визначається точкою перетину продовжень бічних сторін трапеції та точкою перетину її діагоналей, ділить основи трапеції пополам.
293. Довести, що в довільному трикутнику точка перетину медіан, центр описаного кола, точка перетину висот лежать на одній прямій.

2.5.4. Афінні перетворення площини

294. У репері $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ афінне перетворення задано формулами:
 $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + 3y$. Знайти:
- образи точок: $A(-1; 2)$; $B(3; -7)$;
 - образи прямих: $7x + y - 3 = 0$, вісі OX , вісі OY ;
 - прообрази прямих: вісі OX , вісі OY , $4x + 9y - 14 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.
295. Написати аналітичне задання афінного перетворення, яке дані точки $A(1; 0)$, $B(-2; 1)$, $C(-1; -1)$ переводить відповідно в точки:
- $A'(3; 1)$, $C'(0; 2)$;
 - $A'(0; 2)$, $B'(1; -4)$.
296. Визначити нерухомі точки афінних перетворень:
- а) б)
297. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі наступних афінних перетворень: а) б) $\begin{cases} x' = x + 3y; \\ y' = y. \end{cases}$

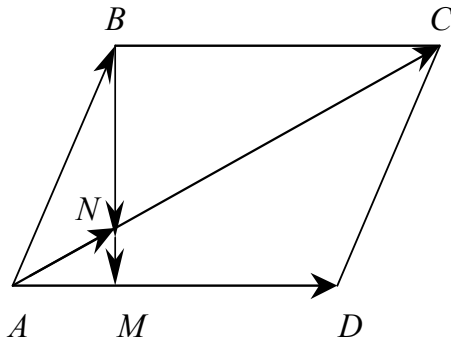
298. Споріднення f задано віссю та парою відповідних точок A та A' . Побудувати образ заданого трикутника $B CD$, якщо f :
- 1) коса симетрія; 2) стиск; 3) зсув.
299. Споріднення f задано віссю та парою відповідних точок M та M' . Побудувати образ заданого квадрата, якщо f – косий стиск з коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -2$.
300. Довести до середини основ трапеції, точка перетину продовжень бічних сторін, точка перетину діагоналей лежать на одній прямій.

3. Контрольні роботи

3.1. Зразки розв'язування задач

№1. На сторонах AD та діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$, $AN = \frac{1}{6}AC$. Показати, що точки M , N і B лежать на одній прямій. В якому відношенні точка N ділить відрізок BM ?

Розв'язання.



Покажемо, що вектори \overrightarrow{BN} та \overrightarrow{BM} колінеарні.

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}.$$

Оскільки $AM = \frac{1}{5}AD$, $AN = \frac{1}{6}AC$,

$$\text{то } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Маємо:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Виразимо \overrightarrow{BN} через \overrightarrow{BM} . Оскільки, то

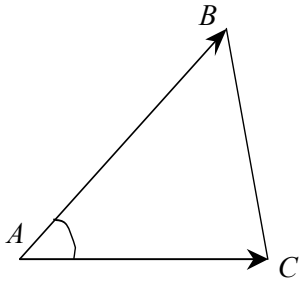
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BN} &= \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AB}) = \\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{5}{6}\overrightarrow{BM}. \end{aligned}$$

Одержали, що $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BM}$, а тому точки B , N та M лежать на одній прямій.

$$\Rightarrow BN = \frac{5}{6}BM \Rightarrow BN : BM = 5 : 1.$$

Відповідь: 5:1.

№2. Визначити кут A трикутника ABC , якщо \dots



Розв'язання.

Кут $\angle A$ $\triangle ABC$ утворюють вектори \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} .

$$\cos \angle A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\sqrt{AB^2} \cdot \sqrt{AC^2}}.$$

Оскільки то :

Тоді

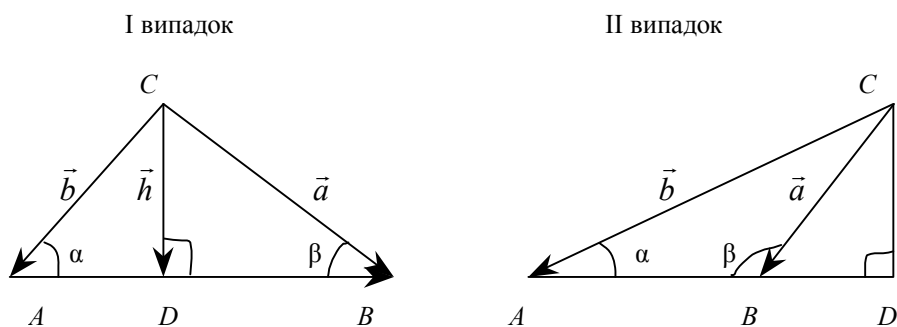
$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} \cdot \sqrt{(-\vec{a} + 2\vec{b})^2}} = \frac{-\vec{a}^2 - \vec{b}\vec{a} + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}^2}{\sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} \cdot \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2}} = \\ &= \frac{-|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 2|\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 4 \cdot |\vec{b}|^2}} = \\ &= \frac{-2^2 + 2 \cdot 3 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 3^2}{\sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \frac{\pi}{3} + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cos \frac{\pi}{3} + 4 \cdot 3^2}} = \\ &= \frac{-4 + 6 \cdot \frac{1}{2} + 18}{\sqrt{4 + 12 \cdot \frac{1}{2} + 9} \cdot \sqrt{4 - 24 \cdot \frac{1}{2} + 36}} = \frac{17}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{28}} = \frac{17}{2\sqrt{133}}. \end{aligned}$$

Отже, $\cos \angle A = \frac{17}{2\sqrt{133}} \Rightarrow \angle A = \arccos \frac{17}{2\sqrt{133}}.$

Відповідь: :

№3. Довести теорему синусів векторим методом.

Розв'язання.



Доведемо, що :

Покажемо, що : Проведемо висоту $CD \triangle ABC$.

: Помножимо скалярно обидві частини рівності на вектор $\vec{h} = \overline{CD}$. Одержимо

Для виразу I :

Для виразу II: $a \sin(180^\circ - \beta) = b \sin \alpha \Rightarrow$:

Аналогічно показуємо, що :

Отже, :

№4. Дано точку $M(-4; 6)$ у репері $(O; \vec{i}, \vec{j})$. За нову вісь абсцис взято пряму $y = 5x$, за нову вісь ординат – пряму $y = -\frac{1}{5}x$. Знайти координати точки M у новій системі координат.

Розв'язання.

Прямі $y=5x$, та $y=-\frac{1}{5}x$. проходять через початок координат, перетинаються в точці O , розташовані під прямим кутом, оскільки $k_1 \cdot k_2 = 5 \cdot -\frac{1}{5} = -1$.

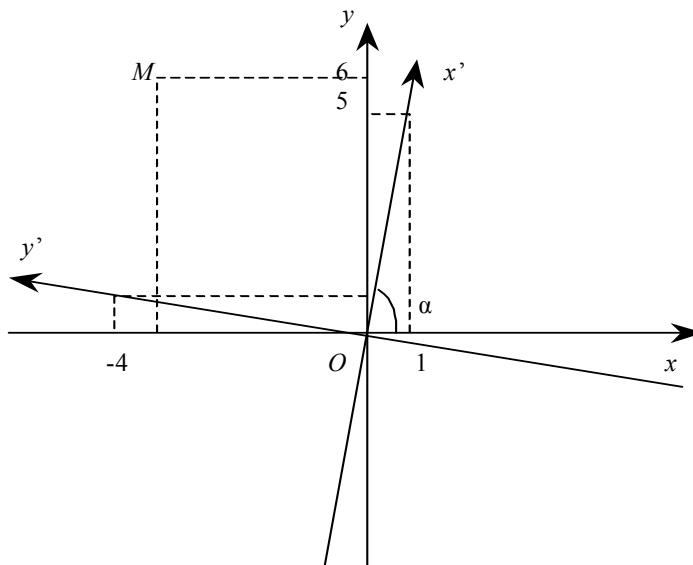
Тому маємо поворот системи координат навколо точки O . Знайдемо формули перетворення системи у вигляді

Оскільки $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$,

Тоді

Точка M в новій системі координат має координати (x', y') . Знайдемо їх, оскільки $x=-4$; $y=6$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -4 = \frac{x'}{\sqrt{26}} - \frac{5y'}{\sqrt{26}} \\ 6 = \frac{5x'}{\sqrt{26}} + \frac{y'}{\sqrt{26}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\sqrt{26} = x' - 5y' \\ 6\sqrt{26} = 5x' + y' \end{cases} \Rightarrow x' = \sqrt{26}; y' = \sqrt{26}.$$



Відповідь: M .

№5. У трикутнику ABC : $A(1; 3)$, $B(5; 6)$, $D(4; 2)$ – точка перетину висот трикутника. Скласти рівняння прямих AC та BC .

Розв'язання.

1) Оскільки D – точка перетину висот трикутника, то $AD \perp BC$, а тому $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$. Пряма BC задана точкою B та вектором \overrightarrow{AD} . Скористаємося рівнянням: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

$$\overrightarrow{AD}(4 - 1; 2 - 3) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(3; -1) \text{ Оскільки } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow 3(x - 5) + (-1)(y - 6) = 0 \Rightarrow \text{рівняння } BC$$

2). Аналогічно знаходимо рівняння прямої AC .

$$\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}. \overrightarrow{BD}(4 - 5; 2 - 6) \Rightarrow \overrightarrow{BD}(-1; -4). -1(x - 1) + (-4)(y - 3) = 0 \Rightarrow x - 1 + 4y - 12 = 0 \Rightarrow x + 4y - 13 = 0.$$

Відповідь: AC ; BC .

№6. Знайти рівняння бісектрис кутів між прямими a та b .

Розв'язання.

Нехай F – сукупність бісектрис кутів, утворених заданими прямими a та b . Тоді кожна точка шуканих прямих однаково віддалена від них.

Якщо M – довільна точка F , то

$$\text{Нехай } M(x, y), \text{ тоді } \rho(M; a) = \frac{|2x + 3y - 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2x + 3y - 7|}{\sqrt{13}},$$

$$\rho(M; b) = \frac{|3x - 2y + 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3x - 2y + 2|}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Маємо рівняння } \frac{|2x + 3y - 7|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x - 2y + 2|}{\sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$|2x + 3y - 7| = |3x - 2y + 2| \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 3x - 2y + 2 \\ 2x + 3y - 7 = -(3x - 2y + 2) \end{cases} \Rightarrow$$

Відповідь: $x - 5y + 9 = 0$, $5x + y - 5 = 0$.

№7. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $A(1; 3)$ і утворюють з прямою $x - y - 3 = 0$ кут, тангенс якого рівний 2.

Розв'язання.

Позначимо задану пряму $a: x - y - 3 = 0$. Шукані дві прямі b і c . Використаємо рівняння

З рівняння $x - y - 3 = 0$ знайдемо кутовий коефіцієнт k_a прямої a .

Нехай k_b, k_c – кутові коефіцієнти шуканих прямих. Знайдемо їх, використавши формулу.

За умовою $\operatorname{tg}\varphi = 2$. А тому маємо сукупність двох рівнянь:

або

$$\text{Звідки} \begin{cases} 2 = \frac{1 - k_b}{1 + k_b}; \\ 2 = \frac{k_c - 1}{1 + k_c}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2k_b = 1 - k_b \\ 2 + 2k_c = k_c - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_b = -\frac{1}{3} \\ k_c = -3. \end{cases}$$

$$\text{Отже,} \quad b: y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3};$$

$$c: y - 3 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 6.$$

Відповідь: $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}; y = -3x + 6$.

№8. Скласти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом і яка проходить через точку $M(4\sqrt{2}; 3)$.

Розв'язання.

$$\text{Діа} \quad a^2 = 35, \quad b^2 = 10, \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{а} \quad c^2 = 35 - 10 = 25 \Rightarrow c = 5.$$

Фокуси F_1 та F_2 еліпса мають координати: $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$ і є фокусами гіперболи.

$$\text{Для гіперболи } c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + b^2.$$

$$\text{Оскільки гіпербола проходить через точку } M(4\sqrt{2}; 3), \text{ маємо } \frac{(4\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{32}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1.$$

Запишемо і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ \frac{32}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 16; \quad b^2 = 9.$$

Отже, шукане рівняння:

Відповідь:

№9 Знайти довжину діаметра кривої, який ділить кут між осями навпіл. Знайти рівняння прямої, що є діаметром.

Розв'язання.

1) Маємо рівняння еліпса $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$. Діаметр еліпса проходить через центр $O(0; 0)$. Ат мушка рівняння діаметра вигляду $y = kx$. Оскільки діаметр ділить кут між осями навпіл, то він утворює з віссю Ox кут $\alpha = 45^\circ$ і. Отже, $y = x$ – рівняння шуканого діаметра.

2). Знайдемо довжину діаметра. Для знаходження точок перетину його з кривою розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 + 3y^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Маємо дві точки перетину $A\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}; -\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{6}{5}}; \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$. Для

знаходження довжини діаметра використаємо формулу

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$AB = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} - \sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{6}{5}} - \sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2} = 4\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

3). Для знаходження рівняння спряженого діаметра використаємо означення спряжених діаметрів і рівняння діаметра, який спряжений з вектором $\vec{p}(p_1; p_2)$:

$$(a_{11} + a_{12}y + a_{10})p_1 + (a_{12} + a_{22}y + a_{20})p_2 = 0$$

Вектор \vec{p} – напрямний вектор знайденого діаметра $x - y = 0 \Rightarrow \vec{p}(1;1)$, а тому шуканий діаметр має рівняння: $2x + 3y = 0$.

Відповідь: $x - y = 0$; $4\sqrt{\frac{3}{5}}$; $2x + 3y = 0$.

№10. Написати рівняння діаметра лінії:

$6x^2 - 9xy + 13y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$, який проходить через точку $K(1; -2)$.

Розв'язання.

I спосіб. Запишемо рівняння діаметра, спряженого з вектором $\vec{p}(p_1; p_2)$:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})p_1 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{20})p_2 = 0.$$

Із даного рівняння :

$a_{11} = 6, a_{12} = a_{21} = -\frac{9}{2}; a_{22} = 13; a_{10} = 1; a_{20} = 2$, а тому шукане рівняння діаметра має вигляд:

$$\left(6x - \frac{9}{2}y + 1\right)p_1 + \left(-\frac{9}{2}x + 13y + 2\right)p_2 = 0.$$

Знайдемо p_1, p_2 . Оскільки точка $K(1; -2)$ належить діаметру, то

$$\left(6 \cdot 1 - \frac{9}{2} \cdot (-2) + 1\right)p_1 + \left(-\frac{9}{2} \cdot 1 + 13(-2) + 2\right)p_2 = 0 \Rightarrow$$

$$16p_1 - \frac{57}{2}p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{57}{32}p_2. \text{ Якщо } p_2 = 32, \text{ то } p_1 = 57.$$

Маємо рівняння діаметра:

$$\left(6x - \frac{9}{2}y + 1\right)57 + \left(-\frac{9}{2}x + 13y + 2\right)32 = 0.$$

$$198x + \frac{319}{2}y + 121 = 0 \Rightarrow 396x + 319y + 242 = 0 \Rightarrow 36x + 29y + 22 = 0.$$

II спосіб.

Якщо лінія є центральною, то діаметр проходить через центр лінії.

Для знаходження центра використаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases}$$

Оскільки $a_{11} = 6, a_{12} = a_{21} = -\frac{9}{2}; a_{22} = 13; a_{10} = 1; a_{20} = 2.$, то

система має вигляд:
$$\begin{cases} 6x - \frac{9}{2}y + 1 = 0, \\ -\frac{9}{2}x + 13y + 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{8}{21}; y = -\frac{2}{7}.$$

Отже, точка M – центр лінії, а тому MK – її діаметр.

Складемо рівняння прямої MK . Використаємо рівняння:

$$\frac{x-1}{-\frac{8}{21}-x_1} = \frac{y+2}{-\frac{2}{7}+2} \Rightarrow \frac{3x-3}{-29} = \frac{y+2}{12} \Rightarrow 36x + 29y + 22 = 0$$

Відповідь: .

№11. Знайти кут між асимптотами гіперболи .

Розв'язання.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 9; b^2 = 4 \Rightarrow a = 3; b = 2 \quad k_2 = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}.$$

Нехай φ – шуканий кут. Використаємо формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}.$$

Маємо $\operatorname{tg}\varphi = \frac{12}{5} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$

№12. Скласти рівняння дотичної до кривої $y^2 = 2x$, яка паралельна прямій $3x - 4y + 8 = 0$.

Розв'язання.

I спосіб.

Нехай a – задана пряма, b – шукана дотична.

Оскільки $b \parallel a$, то рівняння прямої b шукаємо у вигляді:

Складемо систему:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ 3x - 4y + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 + 8y + 2c = 0.$$

Оскільки дотична перетинає криву у двох точках, які збігаються, то дискримінант квадратного рівняння дорівнює 0.

$$D = 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 0 \Rightarrow 16 - 6c = 0 \Rightarrow c = \frac{8}{3}.$$

Отже, $b: 3x - 4y + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow 9x - 12y + 8 = 0$.

Відповідь: $9x - 12y + 8 = 0$.

II спосіб.

Використаємо рівняння дотичної до кривої у заданій точці $(x_0; y_0)$:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{10}x_0 + a_{22}y_0 + a_{00}) = 0.$$

Оскільки для кривої $y^2 = 2x$ або $x = \frac{1}{2}y^2$:

$$a_{11} = 0; a_{12} = 0; a_{10} = -1; a_{22} = 1; a_{20} = 0; a_{00} = 0,$$

то рівняння дотичної має вигляд: або

За умовою дотична паралельна прямій, тому

$$x_0 \text{ знайдемо із рівняння кривої: } \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{8}{9}.$$

$\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{3}\right)$ – точка дотику, а тому дістанемо наступне рівняння

$$\text{дотичної: } x - \frac{4}{3}y + \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow 9x - 12y + 8 = 0.$$

Відповідь:

№13. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.

Розв'язання.

Маємо рівняння кривої в полярній системі координат:

Використаємо рівняння, де p – фокальний параметр кривої, ε – ексцентриситет.

$$\rho = \frac{2}{5 - \cos \varphi} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5} \cos \varphi} \Rightarrow p = \frac{2}{5}; \varepsilon = \frac{1}{5}.$$

Оскільки $\varepsilon < 1$, то маємо рівняння еліпса. Знайдемо його канонічне рівняння.

$$p = \frac{b^2}{a}; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$$\text{Утворимо систему: } \begin{cases} \frac{b^2}{a} = \frac{2}{5}; \\ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2a}{5}; \\ 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2a}{5}; \\ \frac{b^2}{a^2} = \frac{24}{25} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{12} \\ b^2 = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{144}; b^2 = \frac{1}{6}.$$

Отже, канонічне рівняння еліпса має вигляд .

3.2. Контрольна робота №1

Варіант 1

1. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах: \vec{i} , якщо \vec{j} .
2. На площині xOy дано точку $M(4; 3)$ у репері (O, \vec{i}, \vec{j}) . Систему координат повернули навколо початку координат так, що нова вісь пройшла через точку M . Визначити старі координати точки A , якщо відомі її нові координати.
3. Знайти точку, симетричну точці $A(12; -8)$ відносно прямої, яка проходить через точки $B(-3; 2)$ і $C(1; -5)$.
4. Знайти рівняння прямих, які проходять через точку $A(1; 3)$ і утворюють з прямою $y = 2x - 1$ кут 45° .
5. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими $x - 2y - 2 = 0$ і $4x + 3y - 12 = 0$.

Варіант 2

1. Визначити $\angle A$ трикутника ABC , якщо $\vec{CA} = -\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$.
2. Дано точку $M \left(3\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2} \right)$. За нові координатні вісі взято прямі $2x - 1 = 0$ (вісь O_1y'), $2y - 5 = 0$ (вісь O_1x'). Знайти координати точки M у новій системі координат.
3. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відомі одна його вершина $A (-4; 3)$ і рівняння двох висот: $3x - 2y + 2 = 0$ і $2x - 7y - 5 = 0$.
4. Скласти рівняння катетів прямокутного трикутника, якщо дано рівняння гіпотенузи $3x - 2y + 4 = 0$ і вершину прямого кута $A (-1; 4)$.
5. Скласти рівняння кола з центром у точці $A (3; 2)$, яке дотикається до прямої $3x + 4y + 13 = 0$.

Варіант 3

1. Визначити довжину сторони BC та кут B трикутника ABC , якщо $\vec{AC} = 3\vec{a} + \vec{b}$, де $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$.
2. Дано $M(O, \vec{i}, \vec{j})$ з рівняннями $y = -\frac{1}{2}x$ і $y = \frac{1}{2}x$.
3. Вершинами $\triangle ABC$ є точки $A (8; 5)$, $B (9; -2)$, $C (5; -4)$. Обчислити координати центра описаного кола.
4. Знайти рівняння прямих, які проходять через точку $A (2; -3)$ і утворюють з прямою $2x + y - 3 = 0$ кут 45° .
5. Скласти рівняння прямих, віддалених від прямої $4x - 3y + 2 = 0$ на 3 лін. одиниці.

Варіант 4

1. Визначити довжину діагоналей паралелограма $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
2. На площині xOy дано точку $A(3; 4)$. Систему координат повернули навколо початку координат так, що нова вісь пройшла через точку A . Визначити рівняння прямої, в новій системі.
3. Знайти точку симетричну точці $M(2; 3)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(-2; -4)$, $B(1; -3)$.
4. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо відомо рівняння гіпотенузи та вершину прямого кута $C(1; -1)$.
5. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих та :

Варіант 5

1. Визначити кут B трикутника ABC , якщо $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 3\vec{b}$, де $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.
2. За нові координатні вісі взято прями $2x - 5 = 0$ (вісь O_1y'), $y - 3 = 0$ (вісь O_1x'). Визначити в новій системі координат рівняння лінії $4x^2 + 4y^2 - 20x - 24y + 45 = 0$.
3. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відомі одна його вершина $B(3; -4)$ та рівняння двох висот.
4. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $M(4; 3)$ і утворюють з прямою $y + 2x - 4 = 0$ кут 45° .
5. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(2; 3)$, яке дотикається до прямої $4x - 3y + 6 = 0$.

Варіант 6

1. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - 7\vec{b}$ на вектор, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.

- Систему координат (O, \vec{i}, \vec{j}) повернули на кут $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Визначити нові координати точки $M(\sqrt{3}; 3)$.
- Визначити координати центра кола, описаного навколо ΔABC , якщо $A(-3; 2)$, $B(4; -1)$, $C(2; 4)$.
- Дано рівняння катета $BC: 2x - 3y - 6 = 0$, вершину прямого кута $C(0; -2)$, вершину $B(3; 0)$ рівнобедреного прямокутного трикутника ABC . Скласти рівняння гіпотенузи та іншого катета.
- Дано рівняння прямих $x - 3y - 5 = 0$ і $x - 3y + 2 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка паралельна даним прямим і знаходиться на однаковій відстані від них.

Варіант 7

- Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах \vec{m}, \vec{n} , якщо $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.
- Здійснено паралельне перенесення реперу (O, \vec{i}, \vec{j}) , причому новий початок розташовано в точці $O'(\frac{1}{3}; 1)$. Визначити в новій системі координат рівняння лінії $2x - 3y + 6 = 0$.
- Обчислити координати точки, яка симетрична точці $A(2; 3)$ відносно прямої, що проходить через точки $B(-3; 2)$, $C(4; -1)$.
- Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника з прямим кутом C , якщо $A(1; -\frac{4}{3})$, $B(6; 2)$.
- Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $2x - 3y + 6 = 0$ і $x - 3y + 2 = 0$.

Варіант 8

- Дано вектор \vec{a} . Знайти довжину вектора \vec{AB} на вектор $\vec{CD} + \vec{MK}$ якщо \vec{a}, \vec{b} — взаємно перпендикулярні один одному вектори, причому $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.
- Визначити рівняння лінії в новій системі координат, одержаної відносно старого початку на кут $\frac{\pi}{4}$.

3. Знайти рівняння сторін ΔABC , якщо дано одну його вершину $A(4; 5)$ та рівняння двох висот: l_1 .
4. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $A(2; 3)$ під кутом 45° до прямої l .
5. Знайти рівняння бісектрис кутів між прямими l_1 і l_2 .

Варіант 9

1. Дано векри \vec{a}, \vec{b} – взаємноперпендикулярні. Знайти промі вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ навколо \overrightarrow{MK} якщо \vec{a}, \vec{b} – висоти трикутника ABC .
2. Вивести рівняння прямої в системі координат, якщо її напрямним є вектор $\vec{a}(1; 2)$.
3. Обчислити координати центра кола, описаного навколо ΔABC , якщо $A(-3; -2), B(3; 4), C(5; -3)$.
4. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо відомо вершину прямого кута $C(2; 5)$ та рівняння гіпотенузи $AB: 2x + 3y + 6 = 0$.
5. Знайти рівняння бісектрис кутів між прямими $x + y + 12 = 0$ і $7x - y + 28 = 0$.

Варіант 10

1. Навколо \vec{a}, \vec{b} – взаємноперпендикулярних побудувати ΔABC та відомо вектор \overrightarrow{CD} і обчислити його середню лінію.
2. Знайти рівняння прямої в системі координат, якщо її напрямним є вектор $\vec{a}(1; 2)$.
3. Обчислити координати точки симетричної точці $A(4; -8)$ відносно прямої, яка проходить через точки $M(-3; 2), N(3; -1)$.
4. Промінь світла проходить через точку $A(2; 3)$, відбивається від прямої $x + y + 1 = 0$ і проходить після цього через точку $B(1; 1)$. Знайти рівняння падаючого та відбитого променів.
5. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x + 3y + 20 = 0$ і $4x + 3y + 10 = 0$.

3.3. Контрольна робота №2

Варіант 1

1. Скласти рівняння еліпса, якщо відстань між його директрисами дорівнює 12,5; $\varepsilon = 0,8$.
2. Скласти рівняння хорди еліпса, якщо довжина хорди α згідно з формулою $\alpha = 2a \sin \theta$.
3. Дано криву $y^2 = 36x$. Знайти відстань від її вершини до тієї точки кривої, фокальний радіус якої дорівнює 13.
4. Дано рівняння кривої. Записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.
5. Звести рівняння кривої $4x^2 - y^2 + xy - 4 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 2

1. Скласти рівняння еліпса, якщо його фокусна відстань дорівнює 24, а сума його півосей дорівнює 18.
2. Знайти довжину відрізка симподіпарболи, обмеженого точками перетину симподіпарболи з директрисами.
3. Знайти висоту арки моста завдовжки 24 м, яка має форму параболи.
4. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.
5. Звести рівняння кривої $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 12 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 3

1. Знайти півосі еліпса, координати його вершин, фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис.
2. Знайти довжину діаметра кривої, спряженою з її діаметром $y = 2x$.
3. Висота арки одного прольоту моста, яка має форму параболу дорівнює 7,5 м. Знайти довжину моста.
4. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.
5. Звести рівняння кривої $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 4 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 4

1. Скласти рівняння еліпса, якщо його фокусна відстань дорівнює 4, а відстань між директрисами дорівнює 9.
2. Знайти рівняння дотичних, проведених до кривої з точки $A(5; 2)$.
3. На кривій $y^2 = 12x$ знайти точку, відстань якої від фокуса вдвічі більша від її відстані до осі кривої.
4. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.
5. Звести рівняння кривої $13x^2 + 10xy + 13y^2 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 5

1. Знайти півосі еліпса, координати його вершин, фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис.
2. Знайти рівняння спряжених діаметрів кривої, якщо один з них паралельний прямій $3x - y + 6 = 0$.
3. Скласти рівняння дотичної до кривої $y^2 = 8x$ проведеної перпендикулярно до прямої $2x - 2y + 5 = 0$.

4. Дати рівняння в полярних координатах. Визначити криву і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.

5. Звести рівняння кривої $5x^2 + 26xy + 5y^2 - 40 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 6

1. Знайти рівняння дуги кривої, відстань між її кінцями дорівнює $2a$, а кут між її радіусами дорівнює 2α .

2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює $\frac{9}{8}$, а відстань між фокусами дорівнює 14.

3. Скласти рівняння дотичної до кривої, проведеної паралельно прямій $6x + 8y - 9 = 0$.

4. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.

5. Звести рівняння кривої $4x^2 + 10xy + 4y^2 - 5 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 7

1. Знайти довжину діаметра кривої, який ділить кут між осями навпіл.

2. Знайти вісь кривої, координати вершин, фокусів, ексцентриситет, рівняння директриси та асимптот.

3. На кривій знайти точку, відстань якої від фокуса в двічі більша від її відстані до вісі кривої.

4. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.

5. Звести рівняння кривої $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 8

1. Скласти рівняння дотичної до гіперболи, проведеної паралельно прямій.
2. Визначити кут між асимптотами гіперболи.
3. Дано криву $y^2 = 14x$. Скласти рівняння діаметра, спряженого з хордою, яка утворює з віссю Ox кут 45° .
4. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат.
5. Звести рівняння кривої до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 9

1. Дано рівняння кривої в декартовій системі координат. Скласти рівняння дотичної до кривої в одній з її точок.
2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 1,25, а відстань між директрисами дорівнює 6,4.
3. Скласти рівняння хорди, яка проходить через вершину параболи $y^2 = 10x$ і ділиться діаметром $y = 6$ пополам.
4. Визначити тип кривої і записати її канонічне рівняння в декартовій системі координат, якщо в полярній системі крива задана рівнянням.
5. Звести рівняння кривої до канонічного виду. Побудувати криву.

Варіант 10

1. Скласти рівняння тієї хорди гіперболи, яка ділиться точкою $A(4; 1)$ навпіл.

2. Знайти всі криві, координати вершин, фокусів, велику і малу осі, рівняння директриси та асимптот.
3. Скласти рівняння дотичної до кривої $y^2 = 8x$, проведеної перпендикулярно до прямої $2x - 2y + 5 = 0$.
4. Дати рівняння в полярних координатах. Знайти криві та їх канонічні рівняння в декартовій системі координат.
5. Звести рівняння кривої $4x^2 - xy + 4y^2 - 3 = 0$ до канонічного виду. Побудувати криву.

Відповіді

32. а) $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$; б) \vec{p}_1 не колінеарний \vec{p}_2 . 39. $\mathbf{1}$. 40. $\mathbf{1}$. 42. $\overrightarrow{SD}(1; -1; 1)$, \overrightarrow{SM}

Додатки

1. Як перекласти геометричну задачу на мову векторів або координат?

Геометричні поняття і відношення	Мовою координат	Мовою векторів
Точки і відрізки на площині		
Точка A	$A(x; y)$	\vec{r}_A - радіус-вектор
Напрямлений відрізок	$(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$, де $A(a_1; a_2)$ - початок, $B(b_1; b_2)$ - кінець відрізка	Вектор \vec{a}
Довжина відрізка AB дорівнює d	$ d $, де $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$.	$ d $
Точки M і M_1 збігаються	$x_0 = x_1; y_0 = y_1$, де $M(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$	$\vec{OM} = \vec{OM}_1$, де O - довільна точка простору
M - середина відрізка AB	$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$, де $M(x; y)$; $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$	$\vec{AM} = \vec{MB}$, або $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$, де O - дов. точка простору.
$AM: MB = m:n$ де M належить AB (поділ відрізка у відношенні $\lambda = \frac{m}{n}$).	$\vec{OM} = \frac{n\vec{OA} + m\vec{OB}}{m+n}$, де $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $M(x; y)$	$\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$, або $\vec{OM} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$, де O - дов. точка площини, або простору.
Точки L, M, N лежать на одній прямій	Якщо $L(l_1; l_2)$, $M(m_1; m_2)$, $N(n_1; n_2)$, то координати однієї з точок задовільняють рівняння прямої, заданої двома іншими	$\vec{LM} = k \vec{MN}$, або $\vec{LN} = \lambda \vec{MN}$, або $\vec{LN} = \mu \vec{LM}$, або де p, q - числа такі, що $p + q = 1$; O - дов. точка площини, або простору.
Точки A, B, C - точки площини загального положення	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, де $(a_1; a_2)$, $(b_1; b_2)$ - координати векторів \vec{a} і \vec{b} відповідно	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, де \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} відповідно
Взаємне розташування прямих на площині		
Прямі a і b перетинаються	$k_1 \neq k_2$, або де $(A_1; B_1)$, $(A_2; B_2)$ - координати векторів нормалей відповідних прямих; k_1, k_2 - кутові коефіцієнти цих прямих.	$\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$, або де \vec{a}, \vec{b} - вектори нормалей, \vec{a}, \vec{b} - напрямні вектори даних прямих

Прямі a і b - перпендикулярні ($a \perp b$)	$a_1b_1+a_2b_2=0$, або $A_1A_2+B_1B_2=0$, де $(a_1;a_2), (b_1;b_2)$ - координати напрямних векторів даних прямих, $(A_1;B_1), (A_2;B_2)$ - координати векторів нормалей цих прямих.	\square , або \square , де \square - напрямні вектори даних прямих, \square - вектори нормалей цих прямих.
$a \parallel b$	\square	$\square \square$, де \square - напрямні вектори даних прямих, \square - радіус-вектори точок, що належать цим прямим
Прямі a і b збігаються	\square	$\square \square$, де \square - напрямні вектори даних прямих, \square - радіус-вектори точок, що належать цим прямим
Деякі властивості геометричних фігур		
Чотирикутник $ABCD$ - паралелограм	Якщо відомі координати вершин паралелограма, то за формулами відстані між двома точками знайти необхідні довжини і координати відповідних векторів і за допомогою координат розглянути властивості паралелограма (протил. сторони рівні і паралельні, діагоналі точкою перетину діляться пополам тощо).	\square , або \square , або \square , де O - довільна точка простору, або \square де M - точка перетину діагоналей.
M - точка перетину медіан трикутника	Точка перетину медіан трикутника ділить кожну із них у відношенні 2:1, починаючи від вершини (поділ відрізка у відношенні λ).	\square , або \square , де O - дов. точка простору.
MN - середня лінія трикутника $ABC, M \in AB, N \in BC$	Точки M і N ділять відрізки AB і BC у відношенні 1:2 (див. поділ відрізка у відношенні λ), $MN \parallel AC$ (див. паралельність прямих), \square (див. довжина відрізка).	\square і \square , і \square
KL - середня лінія трапеції $ABCD$	Аналогічно представити усі властивості середньої лінії трапеції використовуючи подані вище співвідношення для точок, відрізків, прямих.	\square і \square , і \square
$\cos \angle ABC$	У векторній формулі записати скалярний добуток та відповідні модулі векторів за допомогою координат.	\dots \dots

2. Інші формули і співвідношення

№ пп	Зміст	Формула
1.	Скалярний добуток векторів	$\vec{a}^2 = \vec{a} ^2$

2.	Довжина вектора	
3.	Кут між векторами	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
4.	Координати вектора за координатами початку та кінця	
5.	Перетворення афінного реперу	
6.	Перетворення ортонормованого реперу	де $\varepsilon = \pm 1$
7.	Пряма лінія	<p>1) ;</p> <p>2) $x = x_0 + ta_1, y = y_0 + ta_2$.</p> <p>3) ;</p> <p>4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;</p> <p>5) ;</p> <p>6) $y = kx + b$;</p> <p>7) ;</p> <p>8) $ax + by + c = 0$.</p>
8.	Кут між прямими	$\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$
9.	Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$	
10.	Еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
11.	Уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
12.	Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$
13.	Пара дійсних прямих, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
14.	Пара уявних прямих, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
15.	Парабола	$y^2 = 2px$
16.	Пара дійсних паралельних	$x^2 - a^2 = 0$

	прямих	
17.	Пара уявних паралельних прямих	$x^2 + a^2 = 0$
18.	Пара прямих, що злилися	$x^2 = 0$
19.	Еліпс, гіпербола, парабола в полярних координатах	⋮
20.	Загальне рівняння лінії 2-го порядку	$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$
21.	Асимптотичні напрями вектора $\vec{p}(p_1, p_2)$.	$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$
22.	Умова спряженості напрямів, визначених векторами	$a_{11}p_1q_1 + 2a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0$
23.	Головні напрями	$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}(p_1^2 - p_2^2) = 0$
24.	Діаметр спряжений з вектором $\vec{p}(p_1, p_2)$	$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})p_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})p_2 = 0$
25.	Центр лінії	⋮
26.	Дотична до лінії в точці (x_0, y_0)	$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0$
27.	Алгоритм зведення загального рівняння лінії до канонічного виду	<p>I. Якщо $a_{12} \neq 0$, то застосовуємо поворот системи координат.</p> <p>1) $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$</p> <p>2);;</p> <p>3) $a'_n = \lambda, a'_{22} = \lambda_2, a'_{12} = 0$.</p> $a'_{10} = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha,$ $a'_{20} = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha.$ <p>$a'_{00} = a_{00}$, де $a'_n, a'_{22}, a'_{12}, a'_{10}, a'_{20}, a'_{00}$ - коефіцієнт рівняння кривої в новому репері:</p> $a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0$ <p>II. Якщо $a_{12} = 0$, то застосовуємо паралельне</p>

		перенесення системи координат.
28.	Аналітичне задання руху площини	$x' = x \cos \alpha - \varepsilon y \sin \alpha + x_0,$ $y' = x \sin \alpha + \varepsilon y \cos \alpha + y_0, \quad \varepsilon = \pm 1$
29.	Аналітичне задання подібності з коефіцієнтом k	$x' = xk \cos \alpha - \varepsilon yk \sin \alpha + x_0,$ $y' = xk \sin \alpha + \varepsilon yk \cos \alpha + y_0, \quad \varepsilon = \pm 1$
30.	Аналітичне задання афінного перетворення	\dots

Література

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А.С. Пархоменко.- М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968.- 912 стр..
2. Атанасян Л.С. и др. Сборник задач по геометрии. Ч.І.- М.: Просвещение, 1973.- 256 с.
3. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии.- М.: Просвещение, 1980.- 238 с.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии.- М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1965.- 228 стр..
5. Кушнір І.А. Трикутник і тетраєдр у задачах.- К.: Рад. школа, 1991.- 208 с..
6. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии.—М.: Наука. Глав.ред.физ.-мат.лит., 1968.- 336 с.

Зміст

Передмова.....	3
1. Елементи векторної алгебри.....	4
1.1. Додавання та віднімання векторів. Множення вектора на число.....	4
1.2. Лінійна комбінація векторів. Лінійна залежність векторів. Координати вектора.....	6
1.3. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами....	10
2. Метод координат на площині.....	11
2.1. Системи координат на площині.....	11
2.2. Пряма лінія.....	16
2.3. Лінії другого порядку.....	21
2.3.1. Еліпс.....	21
2.3.2. Гіпербола.....	23
2.3.3. Парабола.....	24
2.4. Загальне рівняння лінії другого порядку.....	26
2.4.1. Дотична до кривої.....	27
2.4.2. Асимптотичні напрями.....	28
2.4.3. Діаметр і центр кривої.....	29
2.4.4. Спряжені напрями. Спряжені діаметри.....	30
2.4.5. Головні напрями. Головні діаметри.....	
2.4.6. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного виду.....	30
2.5. Перетворення площини.....	31
2.5.1. Відображення. Перетворення.....	34
2.5.2. Рухи площини.....	35
2.5.3. Перетворення подібності.....	36
2.5.4. Афінні перетворення площини.....	36
3. Контрольні роботи.....	47
3.1. Зразки розв'язування задач.....	52
3.2. Контрольна робота №1.....	57
3.3. Контрольна робота №2.....	59
Відповіді.....	
Додатки.....	59
1. Як перекласти геометричну задачу на мову векторів або координат?.....	61
	64

2. Інші формули і співвідношення.....
Література.....

Віра Андріївна Ржеко

Микола Петрович Красницький

Аналітична геометрія

Частина I

Навчальне видання

Здано до набору 1.10.2004 р. Підп. до друку 28.10.2004 р.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 3,91. Формат 60*84/16
Наклад 160. Зам. №121

Надруковано в ІОЦ Полтавського державного педагогічного університету
імені В.Г.Короленка
(36003, м.Полтава, вул.Остроградського, 2)